שיעורי בית 6

28 בנובמבר 2015

1. נתון $\phi : G_1 \to G_2$ הומומורפיזם בין חבורות. אברי היחידה הם בהתאמה: e_1 e_2 .הוכח :

   (א) $\phi(e_1) = e_2$ [רמז: חשב $\phi(e_1 e_1)$]

   (ב) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$לכל $g \in G_1$.

   (ג) שהגרעין המוגדר $ker(\phi) = \{x \in G_1 | \phi(x) = e_2\}$ הוא תת־חבורה של G_1

   (ד) שהתמונה $Im(\phi) = \{\phi(x) | \, x \in G_1\}$ היא תת־חבורה של G_2.

2. הגדרה: ההמופריזם $\phi : G_1 \to G_2$ המוגדר $\phi(g) = e_2$ לכל $g \in G_1$ נקרא ההומורפיזם הטריוואלי.

   (א) מצא המומורפיזם לא טריוואלי מהחבורה החיבורית $\mathbb{Z}_3$ לחבורת התמורות S_3

   (ב) הוכח שההומומורפיזם הטריאלי הוא ההומומורפיזם היחיד מ S_3 ל $\mathbb{Z}_3$

3. תהא G חבורה. נגדיר $Aut(G)$ להיות קבוצת כל ההומומורפיזם $\phi : G \to G$ ההפיכים (כלומר חח"ע ועל)

   (א) הוכח כי $Aut(G)$ חבורה ביחס לפעולת הרכבת פונקציות.

   (ב) נגדיר הומורפיזם של חבורות

   $$\Phi : G \to Aut(G)$$

   ע"י $\Phi(x) = I_x$ כאשר I_x מוגדר להיות פונקציה ההצמדה. כלומר $I_x(g) = xgx^{-1}$.
   הוכיחו כי Φ הומורפיזם (אין צורך להוכיח כי $I_x \in Aut(G)$) ומצאו $ker(\Phi)$.

4. כל החבורות בתרגיל זה מוגדרות עם פעולת כפל (וחבורת התמורות עם הרכבה).

(א) נביט בהעתקה $\phi : (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \to \{-1,1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(x) = \frac{x}{|x|} = sign(x)$.(לדוגמה: $\phi(-3) = -1$ $\phi(3) = 1$) הוכח ש ϕ המומורפיזם ומצא את הגרעין

(ב) : $\phi : (\mathbb{C}\backslash\{0\}) \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}|x > 0\}$ המוגדרות על ידי $\phi(a+ib) = a^2+b^2$.(לדוגמה: $\phi(1+2i) = 5$) ,הוכח שהיא הומומורפיזם ומצא את הגרעין . איזה צורה גיאומטרית יש לגרעין?

(ג) ההומורפיזים $\phi : S_n \to \{-1,1\}$ההמוגדרת על ידי $\phi(\sigma) = sign(\sigma)$. מצא את הגרעין של ϕ