

תרגיל 6 אינפי 3 תשע"ו

22 בנובמבר 2015

1. יהי (X, d) מרחב מטרי ותהייה $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות רציפות במ"ש. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $f(x) \neq 0$ אז $\frac{1}{f}$ רציפה במ"ש.

(ב) אם קיים $R > 0$ עבורו $|f(x)| \geq R$ לכל $x \in X$ אז f רציפה במ"ש.

(ג) $f \cdot g$ רציפה במ"ש.

(ד) אם f חסומה אז $f \cdot g$ רציפה במ"ש.

(ה) אם f, g חסומות אז $f \cdot g$ רציפה במ"ש.

2. תהי $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ סדרת פונקציות רציפות במ"ש.

(א) נניח שהסדרה מתכנסת לפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ בנורמה $\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$. האם f רציפה במ"ש?

(ב) נניח שהסדרה מתכנסת לפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ בנורמה $\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. האם f רציפה במ"ש?

3. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות (בכל נקודה בה הן מוגדרות):

$$(א) f(x, y) = x^3 + 3y^2 - \frac{x}{y}$$

$$(ב) f(x, y) = e^{\cos(xy)}$$

$$(ג) f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$.f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 - z^3) \quad (\text{ד})$$

4. בדקו את דיפרנציאביליות הפונקציות הבאות במישור:

$$.f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$.f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$.f(x, y) = \ln(x^4 + y^6 + 1) \quad (\text{ג})$$

$$.f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

5. נגדיר משטח ב- \mathbb{R}^3 על ידי: $z = x^2 + y^2$.

מצאו נקודה על משטח זה, שבה המישור המשיק למשטח מאונך לוקטור $(1, 1, -2)$.

6. נגדיר משטח ב- \mathbb{R}^3 על ידי: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ עבור $a > 0$. בנקודה P על

המשטח מעבירים מישור משיק למשטח. מישור זה חותך את ציר ה- x בנקודה P_x ,

את ציר ה- y בנקודה P_y ואת ציר ה- z בנקודה P_z . הוכיחו שהסכום $\|P_x\| + \|P_y\| +$

$\|P_z\|$ הוא קבוע ומצאו אותו (כביטוי של a , מן הסתם).

7. חשבו את הנגזרות של f בכיוון הוקטור h בנקודה a .

$$.a = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), h = (-1, 0), f(x, y) = x \sin(x + y) \quad (\text{א})$$

$$.a = (3, 2, 1), h = (4, 3, 0), f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (\text{ב})$$