# תרגיל להגשה 1 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
# 88-373 סמסטר ב' תשפ"א

**הוראות.** כתבו באופן ברור שם ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.
יש להגיש את התרגיל דרך אתר הקורס במודל (במטלה הייעודית לכך), עד לתאריך **31.5.2021**.
משקל כל שאלה 12 נקודות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

בהצלחה!

---

**תרגיל 1.** יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב מדיד, ותהי $X \subseteq \Omega$ תת-קבוצה.

א. הוכיחו כי $\{A \subseteq \Omega \mid A \cap X = \varnothing \text{ או } A \cap X = X\}$ היא $\sigma$-אלגברה על $\Omega$.

ב. הוכיחו או הפריכו: $\{A \in \mathcal{F} \mid A \subseteq X\}$ היא $\sigma$-אלגברה על $X$.

ג. הוכיחו או הפריכו: $\{A \cap X \mid A \in \mathcal{F}\}$ היא $\sigma$-אלגברה על $X$.

**תרגיל 2.** תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים אחיד על $[0,1]$.
נגדיר סדרה חדשה של משתנים מקריים $Y_1, Y_2, \ldots$ לפי $Y_n = X_n X_{n+1}$.

א. האם קיימים אינסוף $X_n$-ים המקיימים $X_n < \frac{1}{n}$?

ב. האם קיימים אינסוף $X_n$-ים המקיימים $X_n < \frac{1}{n^2}$?

ג. האם קיימים אינסוף $Y_n$-ים המקיימים $Y_n < \frac{1}{8n}$?

**תרגיל 3.** יהיו $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ משתנים ממשיים בקטע $[0,1]$, ותהי $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מספרים חיוביים המקיימת $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. הראו שקיים $x \in [0,1]$ המקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{|x-a_n|} < \infty .$$

(רמז: הגרילו את $x$, הגדירו מאורעות מתאימים והשתמשו בבורל-קנטלי).

**תרגיל 4.** יהי $s > 1$. **פונקציית זטא של רימן** הינה $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. יהיו $X, Y$ משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים זהה, שקבוצת ערכיהם היא $\mathbb{N}$, עם התפלגות

$$P(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} .$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את המאורע $A_n = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \equiv 0 \pmod{n}\}$.

א. הוכיחו כי אם $m_1, m_2, \ldots$ זרים בזוגות, אזי המאורעות $A_{m_1}, A_{m_2}, A_{m_3}, \ldots$ הם בלתי-תלויים.

ב. הסיקו את נוסחת אוילר:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \text{ ראשוני}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

ג. הוכיחו כי ההסתברות ש-$X$ חופשי מריבועים (כלומר לא מתחלק באף ריבוע למעט 1) היא $\frac{1}{\zeta(2s)}$.

ד. יהי $Z = \gcd(X, Y)$. הוכיחו כי ההתפלגות של $Z$ הינה

$$P(Z = n) = \frac{n^{-2s}}{\zeta(2s)}.$$

**תרגיל 5.** קבעו לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$:

א. $\mathbb{E}[X^a] = \mathbb{E}[X]^a$ לכל משתנה מקרי חיובי $X$?

ב. $\mathbb{E}[X^a] \geq \mathbb{E}[X]^a$ לכל משתנה מקרי חיובי $X$?

ג. $\mathbb{E}[X^a] \leq \mathbb{E}[X]^a$ לכל משתנה מקרי חיובי $X$?

**תרגיל 6.** יהי $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ משתנה מקרי המתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר $\lambda$, ויהי $a > \mathbb{E}[X]$. חסמו את ההסתברות $P(X - \mathbb{E}[X] \geq a)$ באמצעות אי-שוויון מרקוב, אי-שוויון צ'בישב ואי-שוויון צ'רנוף.

**תרגיל 7.**

א. הראו כי לכל $x > 0$,

$$P(N(0,1) \geq x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(רמז: זה רק תרגיל באינטגרציה. כתבו את האינטגרל של אגף שמאל, ושימו לב שבתחום $t \geq x$ מתקיים $\frac{t}{x} \geq 1$.)

ב. יהיו $X_1, X_2, \ldots$ ממבתש"ה עם תוחלת $\mu$ ושונות $\sigma^2$. נסמן $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. הראו כי $S_n > 2\sqrt{n \log n}$ כמות סופית של פעמים כמעט תמיד.

**תרגיל 8.**

א. חשבו את הפונקציה האופיינית של התפלגות פואסון $\mathrm{Poi}(\lambda)$.

ב. באמצעות הפונקצייה האופיינית, הוכיחו כי אם $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1)$ ו-$Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda_2)$ בלתי-תלויים אז $X + Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

**תרגיל 9.** יהיו $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ ו-$\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ סדרות של משתנים מקריים כך ש-$X_n \xrightarrow{d} X$ וגם $Y_n \xrightarrow{d} Y$. נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$, $X_n$ ו-$Y_n$ בלתי-תלויים, וגם $X$ ו-$Y$ בלתי-תלויים. הוכיחו כי מתקיים $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$.