תרגיל 4

2 באפריל 2019

1. תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ פרמטריזציה חלקה Γ ב $\mathbb{R}^2$ בעלת וקטור משיק באורך יחידה T ווקטור נורמל N המוגדרים על ידי

$$T(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\left(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\right)$$
$$N(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\left(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)\right).$$

בהינתן שדה וקטורי $F = (F_1, F_2)$ יהי $\omega = -F_2\mathbf{d}x + F_1\mathbf{d}y$. הראו שמתקיים

$$\int_\gamma F \cdot N\mathbf{d}s = \int_\gamma \omega.$$

2. יהי $p \in \mathbb{R}^2$, ויהי $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^2$ שדה וקטורי המוגדר על ידי

$$F(x) = \nabla \log \|x-p\|^2.$$

יהי C מעגל עם מרכז ב p מכוון נגד כיוון השעון. הראו על ידי חישוב ישיר (או בכל דרך אחרת) שמתקיים:

$$\int_C F \cdot N\mathbf{d}s = 4\pi$$

כאשר $F \cdot N$ מוגדר כמו בתרגיל הקודם.

3. תהי C עקומה חלקה וסגורה ב $\mathbb{R}^2$ מכוונת נגד כיוון השעון העוקפת את הנקודות $p_1, \ldots, p_n$. נגדיר

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i \nabla \log \|x-p_i\|^2$$

כאשר $q_1, \ldots q_n \in \mathbb{R}$ הם קבועים. בעזרת משפט גרין ותרגיל הקודם הראו ש

$$\int_C F \cdot N\mathbf{d}s = 4\pi\left(q_1 + \cdots + q_n\right).$$

4. חשבו את האינטגרלים

$$\int_{\Gamma} P\mathbf{d}x + Q\mathbf{d}y$$

עם Γ נגד כיוון השעון עבור המקרים הבאים:

(א) $P = x^2(y+1), Q = -xy^2$ כאשר

$.\Gamma = \left\{(x,y)|x^2+y^2=1\right\}$

(ב) $P = x^2(y+1), Q = -xy^2$ כאשר

$.\Gamma = \left\{(x,y)\,|x^2+y^2=1, y \geq 1\right\}$

(ג) $P = x(x+y)^2 + e^{-x^3}, Q = e^{-(x-y)^3}$ כאשר

$.\Gamma = \left\{(x,y)\middle|\, |x|+|y|=2\right\}$

הדרכה: השתמשו בהחלפת משתנים $u = x+y$ ו $w = (x-y)$.

(ד) $Q = x$ $P = -y + \cos x$ ו

$.\Gamma = \left\{(x,y)\,|x^2+3y^2+2xy=1\right\}$

5. הוכיחו כי עבור $a > b$ השטח של הציקלואידה

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} \leq \left(a^2-b^2\right)^{\frac{2}{3}}$$

הוא

$$.\frac{3\pi\left(a^2-b^2\right)^2}{8ab}$$

הדרכה: הסבירו קודם מדוע

$$x = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$$
$$y = \frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t$$

עבור $t \in [0, 2\pi]$ היא פרמטריזציה של הציקלואידה המדוברת.