

4.1 וריאציית המקדמים (Revisited)

נביא תחילה את כלל קרמר מאלגברה לינארית

משפט קרמר (Cramer's rule)

נתבונן במערכת המשוואות $A\vec{x} = \vec{b}$, כאשר A היא מטריצה ריבועית ($n \times n$) ו \vec{b} הוא וקטור עמודה ($n \times 1$).
כידוע, למערכת קיים פתרון יחיד אם ורק אם $\det A \neq 0$. אם קיים פתרון יחיד ניתן למצוא כל רכיב בו ע"י

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} = \frac{|A_i|}{|A|}$$

כאשר A_i היא המטריצה המתקבלת ע"י החלפת העמודה i שבמטריצה A בווקטור \vec{b} .

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

הערה

בשיטה זו לא חייבים לפתור את כל המערכת כדי למצוא רכיב מסויים.

דוגמה

$$\begin{cases} 4x - y + z = -5 \\ 2x + 2y + 3z = 10 \\ 5x - 2y + 6z = 1 \end{cases} \quad \text{פתור את המערכת הבאה בעזרת כלל קרמר:}$$

פתרון

נכתוב את המערכת בצורה מטריציאלי: $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$. נחשב את

הדטרמיננטות:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 4(18) - (-1)(-3) + 1(-14) = 55$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 10 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \dots = -55$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 165$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 10 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 110$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = -1, y = \frac{165}{55} = 3, z = \frac{110}{55} = 2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ולסיכום פתרון המערכת הוא}$$

נחזור חזרה למד"ר

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)} = b(x) \text{ נחזור חזרה למד"ר}$$

ראינו שאם נתונים לנו n פתרונות בת"ל y_1, \dots, y_n של המשוואות ההומוגניות הקשורה

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)} = 0$$

$$C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x) \text{ כאשר } C_1, \dots, C_n \text{ מקיימים:}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

נוכל להפעיל כאן את כלל קרמר ולהסיק שלכל $1 \leq i \leq n$

$$C_i'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_{i-1}^{(n-1)} & b(x) & y_{i+1}^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}} = \frac{W_i(x)}{W(x)}$$

המכנה הוא כמובן הוורונסקיאן, ואת המונה נהוג לסמן ע"י W_i .

אם נוציא אינטגרל נקבל $C_i(x) = \int^x \frac{W_i(x)}{W(x)} dx + K_i$. בנינו את הפתרון הכללי

של המד"ר:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n y_i(x) \left(\int^x \frac{W_i(x)}{W(x)} dx + K_i \right)$$

את הגבול התחתון באינטגרלים מוחרים בהתאם לצרכי השאלה.
ניתן גם לפתוח סוגריים:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n y_i(x) \int^x \frac{W_i(x)}{W(x)} dx + \sum_{i=1}^n y_i(x) K_i$$

$$y_c - y_h - \sum_{i=1}^n y_i(x) \int^x \frac{W_i(x)}{W(x)} dx$$

פתרון פרטי למשוואה האי הומוגנית.

הערה

חשוב מאוד שהמד"ר תהיה בצורה נורמלית ($a_n(x) = 1$) אחרת ה"פתרון" אינו נכון!

תרגילים

למשוואות הבאות נתונים שני פתרונות בת"ל של המשוואה ההומוגנית הקשורה. פתור אותן!

א. $y'' - 2y' - 3y = 2 \sin x, \quad e^{-x}, e^{3x}$

ב. $y'' - 2y' = x + 2e^x, \quad 1, e^{2x}$

פתרון

א. נחשב את הוורונסקיאן: $W(e^{-x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -e^{-x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 4e^{2x}$
כמו כן נחשב את W_1, W_2 :

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ 2 \sin x & 3e^{3x} \end{vmatrix} = -2e^{3x} \sin x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & 2 \sin x \end{vmatrix} = 2e^{-x} \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{W_1}{W} = \frac{-3e^{3x} \sin x}{4e^{2x}} = -\frac{3}{4}e^{3x-2x} \sin x = -\frac{3}{4}e^x \sin x$$

נחשב את האינטגרל $C_1 = \int \frac{W_1}{W} dx$:

$$C_1 = \int \frac{-1}{2} e^x \sin x dx = -\frac{1}{2} e^x \sin x - \int -\frac{1}{2} e^x \cos x dx = \begin{bmatrix} u = \sin x & v = -\frac{1}{2} e^x \\ u' = \cos x & v' = -\frac{1}{2} e^x \end{bmatrix} uv - \int u' v dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^x \sin x + \int \frac{1}{2} e^x \cos x dx = \begin{bmatrix} u = \cos x & v = \frac{1}{2} e^x \\ u' = -\sin x & v' = \frac{1}{2} e^x \end{bmatrix} = \dots$$

$$C_1 = \frac{e^x}{4}(\cos x - \sin x) + K_1$$

באופן דומה $C_2 = -\frac{1}{20}e^{-3x}(\cos x + 3 \sin x) + K_2$. הפתרון הכללי הוא

$$\begin{aligned} y &= e^{-x} \left(\frac{e^x}{4}(\cos x - \sin x) + K_1 \right) + e^{3x} \left(-\frac{e^{-3x}}{20}(\cos x + 3 \sin x) + K_2 \right) \\ &= \dots = K_1 e^{-x} + K_2 e^{3x} + \frac{\cos x - 2 \sin x}{5} \end{aligned}$$

ב. נחשב את הוורונסקיאן $W(1, e^{2x}) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{2x}$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ x + 2e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -xe^{2x} - 2e^{3x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x + 2e^x \end{vmatrix} = x + 2e^x$$

$$C_1 = \int \frac{W_1}{W} dx = \dots = \frac{-x^2}{4} - e^x + K_1$$

$$C_2 = \int \frac{W_2}{W} dx = \dots = \frac{-e^{2x}}{4}(x+1) - e^{-x} + K_2$$

הפתרון הוא:

$$y = K_1 - 1 + K_2 e^{2x} - \frac{x^2}{4} - 2e^x - \frac{x}{4}$$

תרגיל

פתור את המד"ר $x^3 y'' + xy' = x^3$. העזר בכך ש $y_1 = 1$ ו $y_2 = \ln|x|$ פתרונות של המד"ר ההומוגנית הקשורה.

פתרון

נביא את המשוואה לצורה נורמלית $y'' + \frac{1}{x}y' = x$. נחשב את הוורונסקיאן:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \ln|x| \\ 0 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \ln(x) \\ x & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = -x \ln|x|$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x$$

$$\int \frac{W_1}{W} dx = \int \frac{-x \ln|x|}{1/x} dx = \int -x^2 \ln|x| dx = \frac{-x^3}{3} \ln|x| - \int \frac{1}{x} \left(\frac{-x^3}{3} \right) dx$$

$$= \frac{-x^3}{3} \ln|x| + \frac{x^3}{9}$$

$$\int \frac{W_2}{W} dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

הפתרון הכללי הוא

$$y = 1 \left(-\frac{x^3}{3} \ln|x| + \frac{x^3}{9} + K_1 \right) + \ln|x| \left(\frac{x^3}{3} + K_2 \right) = K_1 + K_2 \ln|x| + \frac{x^3}{9}$$

4.2 פונקציית גרין

חזרה מהירה

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases} \quad \text{נניח שנתונה לנו בעיית קושי (מד"ר + תנאי התחלה):}$$

ושני פתרונות בת"ל y_1, y_2 למשוואה ההומוגנית הקשורה, הפתרון הוא

$$y(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)} b(t) dt$$

$$G(x, y) = \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}$$

שאלה ממבחן (מועד ב' תשע"א, שאלה 2)

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad \text{מצא את הפתרון הכללי של המשוואה} \quad (\text{א})$$

$$y'' - 2y' + y = L(x), y(0) = y'(0) = 0 \quad \text{מצא נוסחה לפתרון הבעיה} \quad (\text{ב})$$

$$\text{האם ניתן למצוא פתרון פרטי של המשוואה בסעיף (א) ע"י שימוש בנוסחה מסעיף ב.} \quad (\text{ג})$$

פתרון

(א) נתבונן במשוואה ההומוגנית הקשורה $y'' - 2y' + y = 0$ "אפשר לראות" ש $y_1 = e^x$ פתרון שלה (נראה כיצד למצוא אותו בהמשך). נמצא את הפתרון הכללי של המשוואה בעזרת הורדת סדר. נציב

$$\begin{cases} y = e^x z \\ y' = e^x z' + e^x z \\ y'' = e^x z'' + 2e^x z' + e^x z \end{cases}$$

מקבלים

$$e^x z'' + 2e^x z' + e^x z - 2e^x z' - 2e^k + e^x z = \frac{e^x}{x}$$

$$e^x z'' = \frac{e^x}{x}$$

$$z'' = \frac{1}{x}$$

$$z' = \ln|x| + C_1$$

$$z = x \ln|x| - x + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = e^x - z = xe^x \ln|x| - xe^x + C_1 xe^x + C_2 e^x}$$

(ב) מהסעיף הקודם ניתן לראות ש $\begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = xe^x \end{cases}$ פתרונות עבור המד"ר ההומוגנית הקשורה הוורונסקיאן הוא

$$W(y_1, y_2) = \dots = e^{2x} (\neq 0)$$

פונקציית גרין של הבעיה היא:

$$G(x, t) = \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)} = \frac{e^t x e^x - e^x t e^t}{\theta^{2t}} \Rightarrow G(x, t) = e^{x-t} (x-t)$$

$$y = \int_0^x (x-t) e^{x-t} f(t) dt$$

(ג) נבדוק האם זה אפשרי:

$$y = \int_0^x e^{x-t} (x-t) \frac{e^t}{t} dt = \int_0^x \frac{e^x (x-t)}{t} dt$$

זה מתבדר, לכן התשובה היא לא: