

תרגיל 8

1. אם (X, τ) מ"ט B_2 אזי $|\tau| \leq 2^{\aleph_0}$
2. אם (X, τ) מ"ט ו B_τ בסיס ל τ . אזי כל $B_\tau \subseteq B' \subseteq \tau$ היא בסיס גם כן.
3. יהא (X, τ) מ"ט ו B_τ בסיס ל τ . תהא C המקיימת: כל קבוצה ב B_τ היא איחוד של קבוצות מ C . הוכיחו כי C בסיס ל τ
4. יהא X קבוצה ו τ, τ' טופולוגיות ו $B_\tau, B_{\tau'}$ בסיסים להם, בהתאמה.
 - (א) הוכיחו כי אם $B_\tau \subseteq B_{\tau'}$ אזי $\tau \subseteq \tau'$
 - (ב) הפריכו את הכיוון השני. כלומר, אם $\tau \subseteq \tau'$ אזי לא בהכרח $B_\tau \subseteq B_{\tau'}$.
5. תהא $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ רציפה. הוכיחו/הפריכו: אם X הוא B_2 אזי גם $f(X)$ הוא B_2 .
6. יהא $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ (עבור $p \notin \mathbb{R}$) ו $\tau = \{O : p \notin O \vee |O^c| \leq \aleph_0\}$. הוכיחו כי (X, τ) אינו ספרבילי ואינו B_2 .
7. בתרגיל זה נוכיח שת"מ של ספרבילי אינו בהכרח ספרבילי. נגדיר $X = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 \right\}$ (חצי מישור העליון). נגדיר

$$B_1 = \{B(x, r) : x \in X, 0 < r \in \mathbb{R}\} \cap X$$

$$B_2 = \left\{ B(x, x_2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} : x \in X \right\}$$
 כאשר $B(x, r)$ הוא הכדור "הרגיל" ב \mathbb{R}^2 . במילים אחרות B_1 הוא חיתוך של הכדורים $B(x, r)$ ב \mathbb{R}^2 . ו B_2 הוא כל הכדורים הפתוחים שהסגור שלהם משיק ל "ציר ה x " איחוד נקודת ההשקה. נגדיר τ להיות הטופולוגיה ש $B_1 \cup B_2$ הוא הבסיס שלה.

(א) הוכיחו כי (X, τ) ספרבילי.

(ב) נגדיר ת"מ $Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$. הוכיחו כי Y אינו ספרבילי.