הגדרה:

מורד בתמורה $\pi \in S_n$ הוא $1 \leq \mathrm{i} \leq n-1$ המקיים $\pi(i) > \pi(i+1)$.

נסמן ב־ $\varphi(n,k)$ את מספר התמורות עם k מורדות ב־ S_n.

טענה:

לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $0 \leq k \leq n$: $\varphi(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k+1-i)^n$.

מוטיבציה:

בחישובים מפורשים עבור $k = 1, 2$ התקבלו התוצאות הבאות:

$\varphi(n,1) = 2^{\mathrm{n}} - \binom{n+1}{1}$, $\varphi(n,1) = 3^{\mathrm{n}} - \binom{n+1}{1} 2^n + \binom{n+1}{2}$,

ומהן ניתן לשער את הנוסחה המובאת לעיל.

ניסויי מחשב במספרים נמוכים (ר' נספח) מאששים את ההשערה.

טענת עזר 1:

לכל $n \in \mathbb{N}$: הנוסחה נכונה עבור $k = 0, n$.

הוכחה:

$k = 0$: $\varphi(n,0) = (-1)^0 \binom{n+1}{0} (0+1-0)^n = 1$, ואכן התמורה היחידה ב־ S_n בלי מורדות כלל היא תמורת הזהות.

$k = n$: באינדוקציה על n: $\varphi(n,n) = 0$, ואכן לפי הגדרה בתמורה ב־ S_n יש לכל היותר $n-1$ מורדות.

הערה: באופן דומה, לכל $k > n$: $\varphi(n,k) = 0$.

טענת עזר 2:

לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $1 \leq k \leq n-1$:

$\varphi(n+1,k) = (n+1-k)\varphi(n,k-1) + (k+1)\varphi(n,k)$.

הוכחה:

נסמן: $\phi(n,k) = \{\pi \in S_n | \pi \, has \, k \, des\}$,

ונגדיר פונקציה $G : \phi(n+1,k) \longrightarrow \phi(n,k-1) \cup \phi(n,k)$ על־ידי:

$\pi \longmapsto \pi(\overline{n+1})$, כאשר $\pi(\overline{n+1})$ היא התמורה המתקבלת מ־ π על־ידי מחיקת האיבר $n+1$. G מוגדרת היטב כיוון ש־ $\pi(\overline{n+1}) \in S_n$, וכן יש בה אותו מספר מורדות כמו ב־ π או אחד פחות ולכן: $\pi(\overline{n+1}) \in \phi(n,k-1) \cup \phi(n,k)$.

נחשב את גודל התמונה ההפוכה של של $\pi \in \phi(n,k-1) \cup \phi(n,k)$:

$\pi \in \phi(n,k-1)$: צריך "להכניס" את $n+1$ במקום כלשהו בתמורה כך שיתווסף לתמורה מורד חדש, ולכן צריך "להכניס" אותו במקום בו אין מורד, כלומר בין i ל־ $i+1$ המקיימים $\pi(i) < \pi(i+1)$,

וכיוון שב־ π יש $k-1$ מורדות ו־ n אפשרויות "להכניס" את $n+1$ (הוספה אחרי האיבר האחרון ודאי לא מוסיפה מורד), נקבל שיש

$n-(k-1)=n+1-k$ מקומות להכניס את $n+1$ כך שנקבל תמורה ב־ S_{n+1}
עם k מורדות, ולכן זהו גודל התמונה ההפוכה של π.
$\pi\in\phi(n,k)$: צריך "להכניס" את $n+1$ במקום כלשהו בתמורה
כך שלא יתווסף לתמורה מורד חדש, ולכן צריך "להכניס" אותו במקום
בו כבר יש מורד, כלומר בין i ל־ $i+1$ המקיימים $\pi(i)>\pi(i+1)$,
וכיוון שב־ π יש k מורדות, וכן "הכנסה" אחרי האיבר האחרון לא מוסיפה מורד,
נקבל שיש $k+1$ מקומות להכניס את $n+1$ כך שנקבל תמורה
ב־ S_{n+1} עם k מורדות, ולכן זהו גודל התמונה ההפוכה של π.
כעת: $\varphi(n+1,k)=|\phi(n+1,k)|=\sum_{\pi\in\phi(n,k-1)\cup\phi(n,k)}|G^{-1}(\pi)|=$
$=(n+1-k)|\phi(n,k-1)|+(k+1)|\phi(n,k)|=$
$=(n+1-k)\varphi(n,k-1)+(k+1)\varphi(n,k)$ כדרוש.

<u>הוכחת הטענה(באינדוקציה):</u>

נתבונן במשולש:

$$\begin{array}{c}
1\\
\varphi(1,0)\quad\varphi(1,1)\\
\varphi(2,0)\quad\varphi(2,1)\quad\varphi(2,2)\\
\varphi(3,0)\quad\varphi(3,1)\quad\varphi(3,2)\quad\varphi(3,3)\\
-----------------\\

\end{array}$$

לפי טענת עזר 1, האלכסון השמאלי $(k=0)$ קבוע־1, והימני $(k=n)$ קבוע־ 0,
וכן לפי הנוסחה $\varphi(2,1)=1$ ־ נכון, כיוון שיש תמורה אחת עם מורד אחד ב־ S_2.

לכן הרישא של המשולש היא $\begin{array}{c}1\\ 1\quad 0\\ 1\quad 1\quad 0\end{array}$ ומקיימת את הנוסחה.

כעת, נניח כי הנוסחה נכונה עד השורה ה־ n, ונוכיח נכונות עבור השורה ה־ $n+1$.
מטענת עזר 1: $\varphi(n+1,0),\varphi(n+1,n+1)$ מקיימות את הנוסחה,
ולכן נותר להוכיח עבור $1\le k\le n$. יהי k כנ"ל. לפי טענת עזר 2:
$\varphi(n+1,k)=(n+1-k)\varphi(n,k-1)+(k+1)\varphi(n,k)=$
$(n+1-k)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k-1+1-i)^n+$
$+(k+1)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k+1-i)^n=$
$=(n+1-k)\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{n+1}{i-1}(k+1-i)^n+$
$+(k+1)\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k+1-i)^n+(k+1)^{n+1}=$
$=\sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}(n+1-k)\binom{n+1}{i-1}+(-1)^i(k+1)\binom{n+1}{i}\right](k+1-i)^n+$
$+(k+1)^{n+1}$
נפשט את הביטוי בסוגריים המרובעות:
$(-1)^{i-1}(n+1-k)\binom{n+1}{i-1}+(-1)^i(k+1)\binom{n+1}{i}=$
$(-1)^{i-1}(n+1-k)\left[\binom{n+2}{i}-\binom{n+1}{i}\right]+(-1)^i(k+1)\binom{n+1}{i}=$

$(-1)^{i-1}(n+1-k)\binom{n+2}{i} + (-1)^i(n+2)\binom{n+1}{i} =$.

$(-1)^{i-1}(n+1-k)\binom{n+2}{i} + (-1)^i(n+2-i)\binom{n+2}{i} =$

$(-1)^i(k+1-i)\binom{n+2}{i}$

נציב חזרה ונקבל:

$\sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^i(k+1-i)\binom{n+2}{i}\right](k+1-i)^n + (k+1)^{n+1} =$

$\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{n+2}{i}(k+1-i)^{n+1} + (k+1)^{n+1} =$

$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+2}{i}(k+1-i)^{n+1}$,

אזי: $\varphi(n+1,k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+2}{i}(k+1-i)^{n+1}$,

והנוסחה נכונה עבור השורה ה־ $n+1$.