אתר המרצה: http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TOP.html

אתר הקורס: math wiki טופולוגיה 8822205

מרחבים מטריים

הגדרה (Frechet 1906): **מטריקה** (או **מרחק**) על קבוצה $X \neq \emptyset$ היא פונקציה –

$$d : X \times X \to [0,\infty)$$

$$(x,y) \mapsto d(x,y)$$

אקסיומות:

m_1) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

m_2) $d(x,y)=d(y,x)$.

m_3) $d(x,y)+d(y,z) \geq d(x,z)$ (אי שוויון המשולש).

אם מתקיימים התנאים אז אומרים ש - (X,d) **מ"מ** (metric space).

קישור מומלץ: https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_space

דוגמאות:

- $(\mathbb{R},d)$ שמוגדרת לפי –

$$d(x,y)=|x-y|$$

- $(\mathbb{R}^n,d)$ שמוגדרת לפי –

א. מטריקה אוקלידית

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \quad ,x=(x_1,..,x_n)\,,y=(y_1,..,y_n)$$

ב. מטריקת הסכום

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \quad ,x=(x_1,..,x_n)\,,y=(y_1,..,y_n)$$

ג. מטריקת המקסימום

$$d(x,y)=\max\{|x_i-y_i|:\mathrm{i}\in\{1,\cdots,n\}\}$$

הערה: $d_{\max}\le d\le d_1\le nd_{\max}$

- בקבוצה $\mathrm{C}[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbb{Z}\ continuous\ \ functions\}$

א. המוגדרת לפי –

$$d_{max}(f_1,f_2)=\max_{a\le x\le b}|f_1(x)-f_2(x)|$$

"הסטייה" המקסימלית בין הפונקציות f_1,f_2 בקטע

(ממשפט ויירשטראס מתקבל מקסימום בקטע $[a,b]$).

ב. $$d_1(f_1,f_2)=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|\,dx$$

"השטח" בין הגרפים של הפונקציות f_1,f_2 בקטע $[a,b]$

<u>הגדרה:</u> (X,d) נקרא **מרחב פסאודו – מטרי** $(pseudometric$, נקרא $semimetric$ לפעמים) אם:

$(m_1^p$ $x=y\Rightarrow d(x,y)=0$ (החלשה של m_1).

$(m_2$ $d(x,y)=d(y,x)$.

$(m_3$ $d(x,y)+d(y,z)\ge d(x,z)$

<u>הגדרה:</u> (X,d) נקרא **מרחב אולטרה – מטרי** $(ultrametric)$ אם:

$(m_1$ $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

m_2) $d(x,y)=d(y,x)$.

m_3^u) $\max\{d(x,y),d(y,z)\}\geq d(x,z)$ (חיזוק של m_3).

<u>הערה:</u>

$$\{pseudometric\}\supset\{metric\}\supset\{ultrametric\}$$

<u>דוגמה :</u> לכל קבוצה X נגדיר –

$$\forall x,y\in X: d_0(x,y)=0$$

פסאודו מטריקת האפס.

זאת פסאודו מטריקה תמיד, אבל זו מטריקה $\Leftrightarrow |X|=1$ (ז"א אם X נקודון).

- **<u>דוגמה:</u>**

א. ב - $X=\mathbb{R}^2$, נגדיר –

$$\rho_1(x,y):=|x_1-y_1|$$

פסאודו – מטריקה (אבל לא מטריקה). למשל –

$$\rho_1\big((3,5),(3,18)\big)=0$$

(<u>הערה</u> – אם נגדיר יחס שקילות ש – x ו – y שקולים אם $\rho_1(x,y)=0$ אז ניתן להסתכל על מחלקות השקילות ובעצם יצרנו את $\mathbb{R}$).

<u>טענה 1:</u> יכולנו להגדיר פסאודו-מטריקה d על X כפונקציה $d:X\times X\to\mathbb{R}$. ואז להוכיח (בעזרת האקסיומות) שהיא לא שלילית. ז"א תמיד מתקיים:

$$\forall x,y\in X: d(x,y)\geq 0$$

(ז"א $d: X\times X\to[0,\infty)$).

<u>הוכחה:</u>

$$2\cdot d(x,y)=d(x,y)+d(x,y)\underbrace{=}_{m_2}d(x,y)+d(y,x)\underbrace{\geq}_{m_3}d(x,x)\underbrace{=}_{m_1^s}0$$

לכן –

$$2\cdot d(x,y)\geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{d(x,y)\geq 0}$$

■

- **דוגמה:** לכל מטריקה d גם $c\cdot d$:$\forall c>0$ מטריקה

טענה 2: על כל קבוצה X עם $|X|\geq 2$ יש (לפחות) $2^{\aleph_0}=$ א מטריקות שונות.

- **דוגמה:** נגדיר על קבוצה X מטריקת "0-1":

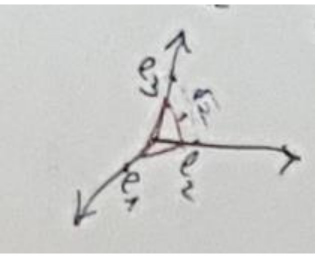
$$d_\Delta(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

d_Δ אולטרה-מטריקה (לבדוק!).

למשל:

$$X=\left\{\frac{e_1}{\sqrt{2}},\frac{e_2}{\sqrt{2}},\dots,\frac{e_n}{\sqrt{2}}\right\}\subset\mathbb{R}^n$$

עם מטריקה שמושרית מ – d נותן דוגמה ספציפית של d_Δ.

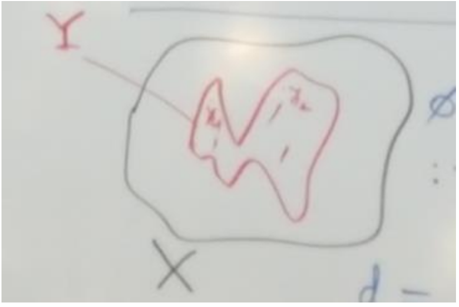


$$d\left(\frac{e_i}{\sqrt{2}},\frac{e_j}{\sqrt{2}}\right)=\left\|\frac{e_i}{\sqrt{2}}-\frac{e_j}{\sqrt{2}}\right\|=\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\|e_i-e_j\|}_{\sqrt{2}}=\begin{cases}1 & i\neq j\\ 0 & i=j\end{cases}$$

נשים לב כי כאשר $i\neq j$ –

$$\|e_i-e_j\|=\sqrt{\dots+1^2+\dots+1^2+\dots}=\sqrt{2}$$

הגדרה (תת מרחב מטרי): יהי (X,d) מ"מ, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.



מטריקת הצמצום של Y מוגדר:

$$d = d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$$

$$\forall y_1, y_2 \in Y$$

מתקבל מ"מ (Y, d_Y) שנקרא **תת מרחב מטרי** של (X,d).

למשל:

$$\underbrace{Y = \left\{\frac{e_i}{\sqrt{2}}, 1 \le i \le n\right\}}_{\text{ת"מ מטרי}} \subset \underbrace{(\mathbb{R}^n, d)}_{=X}$$

מטריקת הצמצום על Y כאן שווה ל - d_Δ.

הגדרה: נתון מ"מ (X,d), $\emptyset \neq A, B \subseteq X$.

$$\boldsymbol{d(A,B)} = \inf\{d(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

$$0 \le d(A,B) < \infty$$

אזהרה: זאת לא מטריקה וגם לא פסאודו-מטריקה בקבוצה $\mathrm{P(X)}$ של תת קבוצות.

רמז: אין אישוויון המשולש (תנו דוגמה)

הערה:

לא תמיד inf ניתן להחליף ב - min. למשל –

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

$$min \neq inf = d(A,B) = 0$$

תרגיל (חשוב!): (ראו שיעורי בית 1)

תמיד מתקיים –

$$|d(x,A)-d(y,A)|\le d(x,y)$$

$$\forall x,y\in X\ ,\emptyset\ne A\subset \underbrace{(X,d)}_{\text{מרחב פ"מ}}$$

רמז: $|d(x,a)-d(y,a)|\le d(x,y)$.

קודם להוכיח מקרה פרטי $A=\{a\}$ דרך m_3 + הגדרת inf.

הגדרה (הקוטר):

$$\boldsymbol{diam(A)}\coloneqq\sup\{d(x,y)|x,y\in A\}$$

$$0\le diam(A)\le\infty$$

A נקראת **חסומה** אם $diam(A)<\infty$.

הערה:

לא תמיד $sup=max$.

$$A=(0,1)$$

$$max\ldots\ne sup\ldots=diam=1$$

הגדרות: יהי (X,d) , $a\in X$, $r>0$.

1) **כדור פתוח** עם מרכז ב – a ורדיוס = r:

$$a\in B(a,r)=B_r(a)\coloneqq\{x\in X|d(a,x)<r\}$$

2) **כדור סגור** עם מרכז ב – a ורדיוס = r:

$$a\in B[a,r]=B_r[a]\coloneqq\{x\in X|d(a,x)\le r\}$$

3) **ספרה** *sphere*

$$a\notin S(a,r)=S_r(a)\coloneqq\{x\in X|d(a,x)=r\}$$

הערה:

$$a\in B(a,r)\subseteq B[a,r]$$

$$\underbrace{S(a,r)}_{a\notin} \subsetneq \underbrace{B[a,r]}_{a\in}$$

תרגיל: לתאר $B(a,r),B[a,r],S[a,r]$ במרחב $(X,d_\triangle)$.

תרגיל: תנו דוגמאות של מ"מ ששם ייתכן:

$$S(a,r)=\emptyset$$

$$B(a,r)=B[a,r]$$

עבור a,r מסוימים.

אזהרה: זה לא ייתכן ב - $\mathbb{R}^n$ או במרחבים נורמיים.

תרגיל: לתאר $B(a,r),B[a,r],S[a,r]$ במרחבים $(\mathbb{R}^2,d_{max}),(\mathbb{R}^2,d_1),(\mathbb{R}^2,d)$

תכונות: (לבדוק !)

א) $0\le r_1\le r_2 \Rightarrow B_{r_1}(a)\subseteq B_{r_2}(a)$.

ב) $diam\big(B_r(a)\big)\le 2r$ (לא תמיד שווה).

ג) $A\subseteq X$ חסומה $\Leftrightarrow \exists z\in X,\exists r>0: A\subseteq B_r(z)$.

ד) (כדור בתת מרחב)

$$B_{d_r}(y,\epsilon)=B(y,\epsilon)\cap Y$$

ה) מצאו מ"מ (X,d) וכדורים שונים כך ש

$$\begin{cases} B_{r_1}(a)\neq B_{r_2}(b) \\ B_{r_1}(a)\subset B_{r_2}(b) \\ r_1>r_2 \end{cases}$$

רמז: שוב תת – מרחב, למחוק ...

ו) $d\le\rho \Rightarrow B_\rho(a,r)\subseteq B_d(a,r)$

הגדרה: (מרחב נורמי) נניח E מרחב ווקטורי על שדה $\mathbb{R}$. פונקציה $\|\cdot\|: E\to[0,\infty)$ נקראת **נורמה** אם מתקיים:

$\|\mathrm{v}\|=0 \Leftrightarrow \mathrm{v}=0_E$ (n_1

לכל $c\in\mathbb{R}, v\in E$ $\|c\mathrm{v}\|=|c|\cdot\|\mathrm{v}\|$ (n_2

$\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|\le\|\mathrm{u}\|+\|\mathrm{v}\|$ (n_3

אז $(E,\|\cdot\|)$ נקרא **מרחב נורמי** normed space

משפט: לכל מ"נ $(E,\|\cdot\|)$ הפונקציה

$$d_{\|\cdot\|}:\mathrm{E}\times E\to[0,\infty) \quad d_{\|\cdot\|}(u,v):=\|u-v\|$$

היא מטריקה (שנקראת מטריקה של הנורמה) ותמיד מתקיים $\|\mathrm{v}\|=d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$.

הערה: "ההתאמה" $(E,\|\cdot\|)\mapsto(\mathrm{E},d_{\|\cdot\|})$ $\{normed\ spaces\}\to\{metric\ spaces\}$

היא:

א. לא על

(למשל מרחב מטרי עם 2 נקודות או מרחב מטרי מעגל עם מטריקה אוקלידית "לא מתקבלת "בתמונה" של ההתאמה הנ"ל)

ב. חד חד ערכית

(נובע מהשוויון $\|\mathrm{v}\|=d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$ -- מטריקת הנורמה משחזרת את הנורמה).

דוגמאות של מרחב נורמי:

- במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^n$ נגדיר

א. נורמה אוקלידית $\|\mathrm{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ (משרה מטריקה אוקלידית)

ב. נורמה של הסכום $\|\mathrm{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ (משרה מטריקת הסכום)

ג. נורמה של מקסימום $\|\mathrm{x}\|_{\max}=\max\{|x_i| : i\in\{1,\cdots,n\}\}$ (משרה מטריקת מקסימום)

הערה: $\|\mathrm{x}\|_{\max}\le\|\mathrm{x}\|\le\|\mathrm{x}\|_1\le n\|\mathrm{x}\|_{\max}$

- נגדיר: $C[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbb{Z}\ continuous\ \ functions\}$

א. $\|f\|_{max}=\max\{|f(x)|:x\in[a,b]\}$ (משרה מטריקת מקסימום)

ב. $\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|\,dx$ (משרה מטריקת השטחים d_1)

תרגיל: לתאר כדור סגור עם רדיוס 3 במרחב $(C[a,b],d_{max})$ עם מרכז בפונקצית האפס.

תרגיל: לתאר כדור סגור עם רדיוס 3 במרחב $(C[a,b],d_1)$ עם מרכז בפונקצית האפס.

הגדרה: $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ (בין מרחבים – מטריים). אומרים ש – f **איזומטריה** אם –

$$\begin{cases} f(X)=Y \\ f \text{ שומרת מרחקים} \end{cases}$$

שומרת מרחקים, כלומר –

$$\forall x_1,x_2\in X:\rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d(x_1,x_2)$$

טענה: כל איזומטריה היא תמיד חח"ע.

הוכחה:

אם $x_1\neq x_2$ נניח ש –

$$f(x_1)=f(x_2)$$

אז לכן –

$$0=\rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d(x_1,x_2)\underbrace{>}_{m_1}0$$

בסתירה!

■

הגדרה: אם בהגדרה הנ"ל דורשים רק את השמירה על מרחקים (לא בהכרח $f(X)=Y$) אז אומרים שהפונקציה היא **שיכון איזומטרי**.

שימו לב: אם $f:X\to Y$ שיכון איזומטרי אז $f:X\to f(X)$ איזומטריה.

הערה:

איזומטריה ב – $Metr$ בתפקיד של איזומורפיזמים. ז"א יש אותן תכונות מטריות.

למשל:

$[5,6] \simeq [1,2] \not\simeq [8,10]$

קיים שיכון איזומטרי לינארי $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ לכל $m \leq n$

(למשל $(x_1,\cdots,x_m) \mapsto (x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)$)

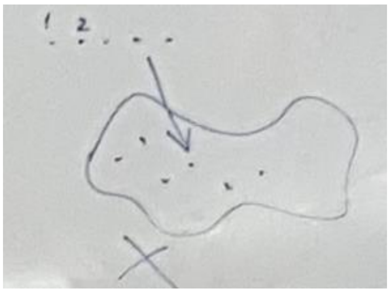
סדרות

הגדרה (תזכורת): **סדרה** בקבוצה X היא פונקציה –

$$\{1,2,\dots\} = N \xrightarrow{f} X$$

$$n \mapsto f(n) = x_n$$

(מסמנים גם a_n או b_n).



הגדרה: אומרים שסדרה x_n **מתכנסת** ל a במרחב (X,d)

ונסמן $\lim x_n = a$ (או $x_n \xrightarrow{d} a$)

אם:

$d(a,x_n) \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

ז"א אם –

$$\lim_{n\to\infty} d(a,x_n) = 0$$

ניסוח שקול: כל כדור $B(a,\mathrm{r})$ של a מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה x_n

ניסוח שקול: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad n \ge n_\varepsilon \Rightarrow d(a,x_n) < \varepsilon$

הגדרה: נק' $a \in X$ נקראת **מבודדת** (isolated) אם –

$$\exists \epsilon > 0: B(a,\epsilon) = \{a\}$$

הגדרה: נניח (X,d) מ"פ. תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת **פתוחה** אם מתקיים:

$$a \in A \Rightarrow \exists \varepsilon_a > 0 \quad B(a,\varepsilon_a) \subseteq A$$