מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' עידו דגן
תאריך: 2015-10-18

מודלים הסתברותיים יישומיים במדעי המחשב
89-919-01

אדמיניסטרטיבי

מרצה: עידו דגן

חדר: 120

דוא"ל: dagan@cs.biu.ac.il

בודקת: ורד שוורץ

הקדמה

האספקטים העיקריים במדעי המחשב הם אלגוריתמים מתמטיים - הפלט מגדיר את הקלט באופן דטרמיניסטי - ושיטות כלליות של בניית תוכנה.

מצד שני, בעולם האמיתי למערכות יש קשר לעולם החיצון, שבהן אין תמיד עולם סגור, והן צריכות לפעול על קלט שאין שליטה עליו, ואין בד"כ אפשרות להוכיח מראש מה יהיו הביצועים. בעולם כזה משתמשים בשיטות אמפיריות בשביל לפתח ובמודלים הסתברותיים כדי למדל מה יקרה(למרות שאי אפשר לחשב במדויק).

בתחום של למידת מכונה אמנם לא כל הגישות הן הסתברותיות, אבל רובן כן מתבססות על הסתברות.

בקורס הזה נלמד שיטות אלגוריתמיות, חישוביות, של שימוש במודלים הסתברותיים.

המודלים ההסתברותיים מפותחים בד"כ בצורה כללית, ג'נרית, ולא איכפת להם על איזה סוג Data הם עובדים - זיהוי תמונה, קלט של רובוט או שוק המניות בבורסה. רוב הדוגמאות בקורס הזה יהיו על קלט טקסטואלי.

נושאים מרכזיים שנכסה:

- חזרה על מושגים רלוונטיים בהסתברות
- מודלים הסתברותיים בסיסיים, והרלוונטיות שלהם למידול נתונים אמפיריים
- אמדנים
- מודלים חבויים - הרבה פעמים לא כל הנתונים שאנחנו רוצים למדל הם נתונים שאנחנו יכולים לצפות בהם

חזרה: מבוא לתורת ההסתברות

מוטיבציה: למדל תופעות שקיימת לגביהן אי וודאות ורוצים להעריך את הסיכוי לכך שמאורעות מסויימים קורים.

נקודת מבט: נסתכל על התופעה שממדלים כניסוי, עם קבוצה(בדידה, רציפה) של תוצאות אפשריות.

מרחב המדגם - S - Sample Space

- קבוצת כל התוצאות האפשריות של הניסוי
לדוגמא:
  - מטבע: $\{H,T\}$
  - קוביה: $\{1,2,\ldots 6\}$
  - טמפרטורה: $[-100,100]$
  - בניסוי מורכב - הטלת שתי מטבעות: $\{\langle H,H\rangle, \langle H,T\rangle, \langle T,H\rangle, \langle T,T\rangle\}$
- קבוצה סופית/אינסופית, רציפה/בדידה

מאורע - E - Event

מאורע E הינו תת קבוצה של מרחב המדגם S

דוגמאות:

- בקוביה: התוצאה 4: $S \supseteq \{4\}$
- התוצאה זוגית: $\{2,4,6\}$

איחוד מאורעות: $E \cup F$

חיתוך מאורעות: $E \cap F$ או EF

משלים: נסמן $\overline{E}$ או E^c: $\overline{E} \triangleq S \backslash E$
מתקיים: $\overline{S} = \emptyset$

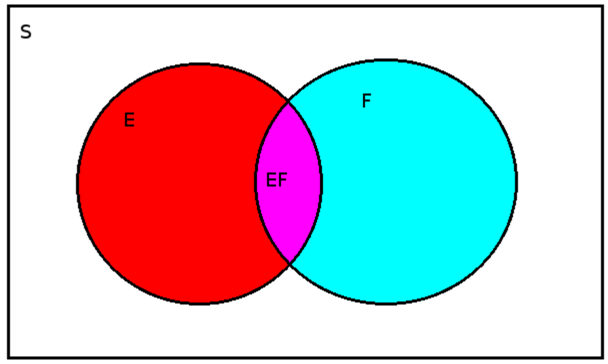
הסתברות מאורעות

הפונקציה $P(E)$ היא פונקציית הסתברות שמייחסת ערך הסתברות לכל מאורע אם היא מקיימת את 3 התנאים הבאים:
(P היא פונקציה ממאורעות ל$[0,1]$)

1. $0 \le P(E) \le 1$
2. $P(S) = 1$
3. לכל סדרת מאורעות זרים $E_1, E_2, \ldots$ מתקיים

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

דיאגרמת וון להמחשת הסתברויות:



מההגדרה מתקיים:

$$P\left(\overline{E}\right)=1-P\left(E\right)$$

הוכחה:

$$P\left(E\right)+P\left(\overline{E}\right)=P\left(E\cup\overline{E}\right)=P\left(S\right)=1$$

בהתאם:

$$P\left(\emptyset\right)=0$$

תכונה נוספת:

$$P\left(E\cup F\right)=P\left(E\right)+P\left(F\right)=P\left(E\cap F\right)$$

נובע אלגברית מההגדרה כשמסתכלים על $E\backslash F$ וF

הסתברות מותנית של מאורעות: $P\left(E|F\right)$:

מטרה: לבטא את ההסתברות שמאורע E קרה בהינתן שידוע שמאורע F קרה.

במילים אחרות: בהינתם שF קרה, מה ההסתברות שקרה החיתוך EF.

בעצם, מצמצמים את מרחב המדגם מS לF. ושואלים - בהינתן שמרחב המדגם הוא F, מה ההסתברות שEF?
ואם מסתכלים על דיאגרמת וון - מה השטח של החיתוך EF ביחס לF?

מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' עידו דגן
תאריך: 2015-10-18

מודלים הסתברותיים יישומיים במדעי המחשב
89-919-01

הגדרה

$$P\left(E|F\right)=\frac{P\left(EF\right)}{P\left(F\right)}$$

שימוש נפוץ בהגדרה: חישוב הסתברות משותפת ע"י הסתברות מותנית:

$$P\left(EF\right)=P\left(E|F\right)\cdot P\left(F\right)$$

דוגמא לשימוש

כד מכיל 5 כדורים שחורים ו5 לבנים. נוציא באקראי שני כדוים, אחד אחרי השני. מה הסיכוי ששניהם שחורים?

פתרון נסמן $E\backslash F$ - הכדור הראשון/השני שחור

$$P\left(EF\right)=P\left(E\right)\cdot P\left(E|F\right)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

כלל השרשרת

$$\begin{aligned}P\left(E_{1}\cdots E_{n}\right) & = P\left(E_{1}\right)\cdot P\left(E_{2}\cdots E_{n}|E_{1}\right)\\
 & = P\left(E_{1}\right)\cdot P\left(E_{2}|E_{1}\right)\cdot P\left(E_{3}\cdots E_{n}\mid E_{1}E_{2}\right)\\
\cdots & = P\left(E_{1}\right)\cdot P\left(E_{2}|E_{1}\right)\cdot P\left(E_{3}|E_{1}E_{2}\right)\cdots P\left(E_{n}\mid E_{1}\cdots E_{n-1}\right)\\
 & = P\left(E_{1}\right)\cdot\prod_{i=2}^{n}P\left(E_{i}\mid E_{1}\cdots E_{i-1}\right)
\end{aligned}$$

נשים ♡: זוהי נוסחא נכונה מתמטית, אבל היא לא כל כך עוזרת לנו כי בשלב האחרון יהיה קשה מאוד לחשב את האיברים האחרונים, שהם מאוד מורכבים ונדירים. לכן בד"כ נשתמש בכלל השרשרת כדי ליצור את המבנה, ואז נפשט את ההסתברויות היותר מורכבות(למשל נסיק שחלק מהתנאים(=ההסתברויות) לא רלוונטים להסתברות)

מאורעות בלתי תלויים(ב"ת)

המטרה: להבדיל מאורעות שבהן ההסתברות של אחד לא משפיעה על השני, כדי לפשט את המידול.

הגדרה

שני מאורעות E,F נקראים ב"ת אם מתקיים $P\left(EF\right)=P\left(E\right)\cdot P\left(F\right)$

מההגדרה מתקיים

אם E וF ב"ת אזי $P\left(E|F\right)=P\left(E\right)$
הוכחה:

$$P\left(E|F\right)=\frac{P\left(EF\right)}{P\left(F\right)}=\frac{P\left(E\right)\cdot\cancel{P\left(F\right)}}{\cancel{P\left(F\right)}}=P\left(E\right)$$

דוגמא: הטלת זוג קוביות

- F - הקוביה הראשונה יצא 4
- E_1 - סכום הקוביות 6

נראה שיש תלות(לפי ההגדרה):

$$P\left(E_1F\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\neq P\left(E_1\right)P\left(F\right)=\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{6}$$

אבל:

- E_2: סכום הקוביות 7

$$P\left(E_2F\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}=P\left(E_2\right)P\left(F\right)=\frac{6}{36}\cdot\frac{1}{6}$$

מסקנה - E_2 וF ב"ת

נכליל את מושג אי התלות לקבוצה מאורעות:

המאורעות $E_1,\dots E_n$ נקראים ב"ת אם **<u>לכל</u>** תת קבוצה שלהם $E_{i_1},\dots E_{i_k}$ מתקיים

$$P\left(E_{i_1}\cdots E_{i_k}\right)=\prod_{j=1}^{k}P\left(E_{i_j}\right)$$

ס