לינארית 2 - תרגיל 5

ההעתקה הצמודה

1. משפט ההצגה של ריס: מצאו וקטור $v \in \mathbb{R}^3$ כך שמתקיים

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - 2y + z = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, v \right\rangle$$

.

2. נתון בסיס של $\mathbb{C}^3$ $\{v_1 = (i,i,0), v_2 = (i,i,i), v_3 = (0,0,-1)\}$. ונתונה העתקה לינארית $\varphi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ לפי

$$\varphi(v_1) = (i,0)$$
$$\varphi(v_2) = (i,i)$$
$$\varphi(v_3) = (i,-i)$$

בצעו גרם־שמידט על וקטורי הבסיס. היעזרו בתהליך וחשבו את המטריצה המייצגת של ההעתקה הצמודה φ^* ביחס לבסיס האורתונורמלי שקיבלתם של $\mathbb{C}^3$ והבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^2$.

3. נתבונן במרחב $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

ותהי העתקה לינארית $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת ע"י $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1x$.

(א) חשבו את ההעתקה הצמודה T^* והראו שהיא לא צמודה לעצמה.

(ב) המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס $\left\{1, x, x^2\right\}$ היא $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ שהיא כן צמודה לעצמה (כלומר, שווה למשוחלפת של עצמה). הסבירו בקצרה למה זה לא סתירה לכך שT לא צמודה לעצמה.

4. תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה צמודה לעצמה. הוכיחו כי $\ker A = \ker A^2$.

5. הוכיחו שאין העתקה צמודה לעצמה $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ כך ש

$$T(1,2,3) = 0$$
$$T(2,5,7) = (2,5,7)$$

רמז: ו"ע של ע"ע שונים צריכים להיות מאונכים.

6. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה אורתוגונלית. הוכיחו כי $Adj(A)$ גם אורתוגונלית.