אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 7

22 בדצמבר 2020

1. חשבו את המספרים הבאים (התוצאה צריכה להיות מספר מרוכב בהצגה קרטזית או פולרית):

   (א) $\sin(1-i)$

   (ב) $\cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6})$

   (ג) $\sin(2\text{cis}\frac{\pi}{2})$

   (ד) $\cos(i)$

   (ה) $\left(e\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)^{1-i}$. חשבו את כל האפשרויות וכתבו מהי התשובה בענף העיקרי.

<u>פתרון:</u>

א. $\sin(1-i) = \frac{e^{i(1-i)}-e^{-i(1-i)}}{2i} = \frac{e^{1+i}-e^{-1-i}}{2i} = \frac{e^{1}\text{cis}1-e^{-1}\text{cis}(-1)}{2i} = \frac{e(\cos 1+i\sin 1)-e^{-1}(\cos(-1)+i\sin(-1))}{2i}$. כעת נקבץ ממשיים ומדומים, ניזכר ש־ $\cos(-x)=\cos x, \sin(-x)=-\sin x$, וניזכר ש $\frac{1}{i}=-i$ (מוזמנים גם לעשות כפל בצמוד של המכנה): לכן נקבל: $\sin 1\frac{e+e^{-1}}{2}-\cos 1\frac{e^{-1}-e}{2}i$.

ב. $\cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6}) = \frac{e^{i\cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6}}+e^{-i\cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{2\text{cis}\frac{4\pi}{6}}+e^{2\text{cis}\frac{10\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{-1+\sqrt{3}i}+e^{1-\sqrt{3}i}}{2} = \frac{e^{-1}\text{cis}\sqrt{3}+e\text{cis}(-\sqrt{3})}{2}$. נדלג ישר לקיבוץ איברים דומים ולצורה הקרטזית: $= \frac{\cos\sqrt{3}(e+e^{-1})+i\sin\sqrt{3}(e^{-1}-e)}{2} = \cos\sqrt{3}\frac{e+e^{-1}}{2}+\sin\sqrt{3}\frac{e^{-1}-e}{2}i$.

ג. $\sin(2\text{cis}\frac{\pi}{2}) = \frac{e^{i\cdot 2i}-e^{-i\cdot 2i}}{2i} = \frac{e^{-2}-e^{2}}{2i} = \frac{e^{2}-e^{-2}}{2}i$ (כאשר המעבר האחרון נובע מהעובדה $\frac{1}{i}=-i$).

ד. $\cos(i) = \frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{e^{-1}+e}{2}$. שימו לב שזה יצא גדול מ1, מה שלא קורה בממשיים!

ה. נתחיל מהתוצאה הכללית: $\left(e\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)^{1-i} = e^{(1-i)\ln_{\mathbb{C}}(e\text{cis}\frac{\pi}{4})}$. נחשב את הלוגריתם:

$$e^{x}\text{cis}y = e^{x+yi} = e\text{cis}\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} e^{x}=e \Rightarrow x=\ln e=1 \\ y=\frac{\pi}{4}+2\pi k \end{cases}$$

(שימו לב שהענף העיקרי מתקבל עבור $k=0$, נצטרך להמשך). לכן נוכל להמשיך:

$$e^{(1-i)\ln_{\mathbb{C}}(e\text{cis}\frac{\pi}{4})} = e^{(1-i)(1+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k))}$$

נחשב את המעריך:

$$(1-i)(1+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k)) = 1+\frac{\pi}{4}+2\pi k+i(-1+\frac{\pi}{4}+2\pi k)$$

ונקבל:

$$e^{(1-i)(1+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k))} = e^{1+\frac{\pi}{4}+2\pi k+i(-1+\frac{\pi}{4}+2\pi k)} = e^{1+\frac{\pi}{4}+2\pi k}\text{cis}(-1+\frac{\pi}{4}+2\pi k)$$

הפתרון הכללי הוא:

$$e^{1+\frac{\pi}{4}+2\pi k}\text{cis}(-1+\frac{\pi}{4}+2\pi k)$$

הפתרון העיקרי מתקבל עבור $k=0$ והוא:

$$e^{1+\frac{\pi}{4}}\operatorname{cis}(\frac{\pi}{4}-1)$$

2. הוכיחו (היעזרו בתרגילים הדומים שעשינו בכיתה):

(א) $\sin(\overline{z})=\overline{\sin(z)}$.

(ב) $\cos(\overline{z})=\overline{\cos(z)}$.

(ג) $\cos(z+w)=\cos z\cos w-\sin z\sin w$.

<u>**פתרון:**</u>

א. $\sin(\overline{z})=\frac{e^{i\overline{z}}-e^{-i\overline{z}}}{2i}=\frac{e^{\overline{-iz}}-e^{\overline{iz}}}{2i}$. כעת, כיון שראינו בתרגול ש $e^{\overline{z}}=\overline{e^{z}}$ נוכל להמשיך: $=\frac{\overline{e^{-iz}}-\overline{e^{iz}}}{2i}=\frac{\overline{e^{-iz}-e^{iz}}}{2i}$. כדי שגם במכנה תהיה הצמדה נרשום: $2i=\overline{-2i}$ ונקבל: $\overline{\sin(z)}=\overline{\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)}=\overline{\left(\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{-2i}\right)}=\frac{\overline{e^{-iz}-e^{iz}}}{\overline{-2i}}$.

ב. באופן דומה: $\overline{\cos(z)}=\overline{\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)}=\frac{\overline{e^{iz}+e^{-iz}}}{\overline{2}}=\frac{\overline{e^{iz}}+\overline{e^{-iz}}}{2}=\frac{e^{\overline{-iz}}+e^{\overline{iz}}}{2}=\frac{e^{i\overline{z}}+e^{-i\overline{z}}}{2}=\cos(\overline{z})$.

ג. נפתח את צד ימין:

$$\cos z\cos w-\sin z\sin w=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\cdot\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}=$$

שימו לב שהמכנה בשני המקרים הוא 4, ושהסימן באמצע הופך לפלוס כיון שבמכנה הימני יש בעצם -4. כלומר מקבלים:

$$=\frac{1}{4}\left(\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\cdot\left(e^{iw}+e^{-iw}\right)+\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\cdot\left(e^{iw}-e^{-iw}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{i(z+w)}+e^{i(z-w)}+e^{-i(z-w)}+e^{-i(z+w)}+e^{i(z+w)}-e^{i(z-w)}-e^{-i(z-w)}+e^{-i(z+w)}\right)=$$

כעת נצמצם את אלה שמשנים סימן ונסכום את שווי הסימן, ונקבל:

$$=\frac{1}{4}\left(2e^{i(z+w)}+2e^{-i(z+w)}\right)=\frac{e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}}{2}=\cos(z+w)$$

בהצלחה!