אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 7

4 בינואר 2021

1. חשבו את המספרים הבאים (התוצאה צריכה להיות מספר מרוכב בהצגה קרטזית או פולרית):
   (א) $\sin(1-i)$.
   (ב) $\cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6})$.
   (ג) $\sin(2\text{cis}\frac{\pi}{2})$.
   (ד) $\cos(i)$.

<u>**פתרון:**</u>

א. $\sin(1-i) = \frac{e^{i(1-i)}-e^{-i(1-i)}}{2i} = \frac{e^{1+i}-e^{-1-i}}{2i} = \frac{e^1\text{cis}1-e^{-1}\text{cis}(-1)}{2i} = \frac{e(\cos 1+i\sin 1)-e^{-1}(\cos(-1)+i\sin(-1))}{2i}$. כעת נקבץ ממשיים ומדומים, ניזכר ש־ $\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$, וניזכר ש $\frac{1}{i} = -i$ (מוזמנים גם לעשות כפל בצמוד של המכנה): לכן נקבל: $\sin 1\frac{e+e^{-1}}{2} + \cos 1\frac{e^{-1}-e}{2}i$.

ב. $\cos(2\text{cis}\frac{\pi}{6}) = \frac{e^{i\cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6}}+e^{-i\cdot 2\text{cis}\frac{\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{2\text{cis}\frac{4\pi}{6}}+e^{2\text{cis}\frac{10\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{-1+\sqrt{3}i}+e^{1-\sqrt{3}i}}{2} = \frac{e^{-1}\text{cis}\sqrt{3}+e\text{cis}(-\sqrt{3})}{2}$. נדלג ישר לקיבוץ איברים דומים ולצורה הקרטזית: $\cos\sqrt{3}\frac{e+e^{-1}}{2} + \sin\sqrt{3}\frac{e^{-1}-e}{2}i = \frac{\cos\sqrt{3}(e+e^{-1})+i\sin\sqrt{3}(e^{-1}-e)}{2} =$.

ג. $\sin(2\text{cis}\frac{\pi}{2}) = \frac{e^{i\cdot 2i}-e^{-i\cdot 2i}}{2i} = \frac{e^{-2}-e^2}{2i} = \frac{e^2-e^{-2}}{2}i$ (כאשר המעבר האחרון נובע מהעובדה $\frac{1}{i} = -i$).

ד. $\cos(i) = \frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{e^{-1}+e}{2}$. שימו לב שזה יצא גדול מ1, מה שלא קורה בממשיים!

2. הוכיחו (היעזרו בתרגילים הדומים שעשינו בכיתה):
   (א) $\sin(\overline{z}) = \overline{\sin(z)}$.
   (ב) $\cos(\overline{z}) = \overline{\cos(z)}$.
   (ג) $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$.

<u>**פתרון:**</u>

א. $\sin(\overline{z}) = \frac{e^{i\overline{z}}-e^{-i\overline{z}}}{2i} = \frac{e^{\overline{-iz}}-e^{\overline{iz}}}{2i}$. כעת, כיון שראינו בתרגול ש $e^{\overline{z}} = \overline{e^{z}}$ נוכל להמשיך: $= \frac{\overline{e^{-iz}}-\overline{e^{iz}}}{2i} = \frac{\overline{e^{-iz}-e^{iz}}}{2i}$. כדי שגם במכנה תהיה הצמדה נרשום: $2i = \overline{-2i}$ ונקבל: $\frac{\overline{e^{-iz}-e^{iz}}}{\overline{-2i}} = \overline{\left(\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{-2i}\right)} = \overline{\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)} = \overline{\sin(z)}$.

ב. באופן דומה: $\overline{\cos(z)} = \overline{\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)} = \frac{\overline{e^{iz}+e^{-iz}}}{\overline{2}} = \frac{\overline{e^{iz}}+\overline{e^{-iz}}}{2} = \frac{e^{\overline{-iz}}+e^{\overline{iz}}}{2} = \frac{e^{i\overline{z}}+e^{-i\overline{z}}}{2} = \cos(\overline{z})$.

ג. נפתח את צד ימין:

$$\cos z\cos w - \sin z\sin w = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\cdot\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} - \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} =$$

שימו לב שהמכנה בשני המקרים הוא 4, ושהסימן באמצע הופך לפלוס כיון שבמכנה הימני יש בעצם -4. כלומר מקבלים:

$$= \frac{1}{4}\left(\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\cdot\left(e^{iw}+e^{-iw}\right) + \left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\cdot\left(e^{iw}-e^{-iw}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{-i(z-w)} + e^{-i(z+w)} + e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} - e^{-i(z-w)} + e^{-i(z+w)}\right) =$$

כעת נצמצם את אלה שמשנים סימן ונסכום את שווי הסימן, ונקבל:

$$= \frac{1}{4}\left(2e^{i(z+w)} + 2e^{-i(z+w)}\right) = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \cos(z+w)$$

3. חשבו את כל האפשרויות וכתבו מהי התשובה בענף העיקרי:

(א) $\left(e\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)^{1-i}$.

(ב) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}$.

(ג) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$.

פתרון:

א. נתחיל מהתוצאה הכללית: $\left(e\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)^{1-i} = e^{(1-i)\ln_{\mathbb{C}}(e\text{cis}\frac{\pi}{4})}$. נחשב את הלוגריתם:

$$e^x\text{cis}y = e^{x+yi} = e\text{cis}\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} e^x = e \Rightarrow x = \ln e = 1 \\ y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

(שימו לב שהענף העיקרי מתקבל עבור $k=0$, נצטרך להמשך). לכן נוכל להמשיך:

$$e^{(1-i)\ln_{\mathbb{C}}(e\text{cis}\frac{\pi}{4})} = e^{(1-i)(1+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k))}$$

נחשב את המעריך:

$$(1-i)(1+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k)) = 1 + \frac{\pi}{4} + 2\pi k + i(-1 + \frac{\pi}{4} + 2\pi k)$$

ונקבל:

$$e^{(1-i)(1+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k))} = e^{1+\frac{\pi}{4}+2\pi k + i(-1+\frac{\pi}{4}+2\pi k)} = e^{1+\frac{\pi}{4}+2\pi k}\text{cis}(-1 + \frac{\pi}{4} + 2\pi k)$$

הפתרון הכללי הוא:

$$e^{1+\frac{\pi}{4}+2\pi k}\text{cis}(-1 + \frac{\pi}{4} + 2\pi k)$$

הפתרון העיקרי מתקבל עבור $k=0$ והוא:

$$e^{1+\frac{\pi}{4}}\text{cis}(\frac{\pi}{4} - 1)$$

ב. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i} = e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\ln_{\mathbb{C}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}$. נחשב את הלוגריתם:

$$e^x\text{cis}y = e^{x+yi} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \text{cis}\frac{5\pi}{3}$$

$$\begin{cases} e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$$

שימו לב שהענף העיקרי מתקבל עבור $k=-1$. נמשיך:

$$e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\ln_{\mathbb{C}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}=e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{5\pi}{3}+2\pi k\right)i}$$

נחשב את המעריך:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{5\pi}{3}+2\pi k\right)i=-\left(\frac{5\pi}{6}+\pi k\right)+\left(-\frac{5\pi}{2\sqrt{3}}-\sqrt{3}\pi k\right)i$$

ונקבל:

$$e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{5\pi}{3}+2\pi k\right)i}=e^{-\left(\frac{5\pi}{6}+\pi k\right)+\left(-\frac{5\pi}{2\sqrt{3}}-\sqrt{3}\pi k\right)i}=e^{-\left(\frac{5\pi}{6}+\pi k\right)}\mathrm{cis}\left(-\frac{5\pi}{2\sqrt{3}}-\sqrt{3}\pi k\right)$$

הפתרון העיקרי מתקבל עבור $k=-1$ והוא:

$$e^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)$$

ג. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}=e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\ln_{\mathbb{C}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$. נחשב את הלוגריתם:

$$e^x\mathrm{cis}y=e^{x+yi}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\mathrm{cis}\frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{cases}e^x=1\Rightarrow x=0\\ y=\frac{2\pi}{3}+2\pi k\end{cases}$$

שימו לב שהענף העיקרי מתקבל עבור $k=0$. נמשיך:

$$e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\ln_{\mathbb{C}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}=e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)i}$$

נחשב את המעריך:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)i=\left(\frac{\pi}{3}+\pi k\right)+\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\pi k\right)i$$

ונקבל:

$$e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)i}=e^{\left(\frac{\pi}{3}+\pi k\right)+\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\pi k\right)i}=e^{\left(\frac{\pi}{3}+\pi k\right)}\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\pi k\right)$$

הפתרון העיקרי מתקבל עבור $k=0$ והוא:

$$e^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

בהצלחה!