

# אלגברה מופשטת 3 – תרגילי חזרה

## שאלה 1

חשבו את שדות הפיצול של הפולינומים הבאים ומצאו קבוצת יוצרים לחבורת גלואה של ההרחבה.

1.  $(x^4 - 8x^2 + 15)(x^2 + 1)$  מעל  $\mathbb{Q}$
2.  $x^5 - 5$  מעל  $\mathbb{Q}[\rho_5 + \rho_5^{-1}]$  באשר  $\rho_5 = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$
3.  $x^6 + 27$  מעל  $\mathbb{Q}$
4.  $x^6 + 27$  מעל  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$
5.  $x^4 + 1$  מעל  $\mathbb{Z}_3$

## שאלה 2

יהי  $E \subseteq \mathbb{C}$  שדה פיצול של  $x^7 - 2$  מעל  $\mathbb{Q}$ .

1. מהו  $[E:\mathbb{Q}]$ ?
2. מצאו קבוצת יוצרים ל- $Gal(E/\mathbb{Q})$ .
3. הוכיחו כי  $E = \mathbb{Q}[\sqrt[7]{2} + \rho_7]$  באשר  $\rho_7 = \exp\left(\frac{2\pi i}{7}\right)$  (רמז: כמה צמודים יש ל- $\sqrt[7]{2} + \rho_7$ ?)
4. הראו כי קיים שדה  $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq E$  כך ש- $[K:\mathbb{Q}] = 14$ .

## שאלה 3

תהי  $E/\mathbb{Q}$  הרחבת גלואה ממימד סופי של  $\mathbb{Q}$  ויהי  $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq E$  שדה. נסמן ב- $n$  את מספר ה- $\mathbb{Q}$ -הומומורפיזמים מ- $L$  ל- $\mathbb{C}$ . הוכיחו כי  $n = |\{g^{-1}Gal(E/L)g \mid g \in Gal(E/\mathbb{Q})\}|$ . מתי  $n = 1$ ?

## שאלה 4

תהי  $E/F$  הרחבה ספרבילית ממימד סופי. הוכיחו כי יש רק מספר סופי של שדות בין  $F$  ו- $E$ .

## שאלה 5

פרקו את הפולינום  $x^{27} - x$  מעל  $\mathbb{Z}_3$ . [הערה: חלוקת פולינומים אינה נחוצה כאן...]

## שאלה 6

יהי  $E$  שדה הפיצול של  $x^8 - x$  מעל  $\mathbb{F}_4$ , השדה עם 4 איברים. כמה איברים יש ב- $E$ ?

## שאלה 7

הוכיחו כי ניתן לבנות בעזרת סרגל ומחוגה מצולע משוכלל בן  $n$  צלעות אם ורק אם  $\varphi(n)$  הוא חזקת 2.

## שאלה 8

1. מצאו את כל תתי השדות של  $\mathbb{Q}[\rho_{17}]$  (באשר  $\rho_{17}$  שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 17).

2. הראו\* כי ניתן לבנות מצולע משוכלל בן 17 צלעות בעזרת סרגל ומחוגה.

\*ללא שימוש בשאלה 7.

### שאלה 9

נאמר שמספר מרוכב  $c \in \mathbb{C}$  הוא בר בנייה אם קיימים שדות  $\mathbb{Q} = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_r \subseteq \mathbb{C}$  כך ש-  
 $c \in L_r$  וגם  $[L_i : L_{i-1}] = 2$  לכל  $1 \leq i \leq r$ . הוכיחו כי  $c = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) בר בנייה אם ורק אם  $|a|, |b|$  ברי בנייה במובן הרגיל.

### שאלה 10

יהי  $f$  פולינום אי פריק ספרבילי מעל שדה  $F$  ויהי  $K$  שדה פיצול של  $f$  מעל  $F$ . יהיו  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  השורשים של  $f$  ב- $K$ . נגדיר  $d_f = \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j)$ . הוכיחו כי  $d_f \in F$ .

( $d_f$  נקרא הדיסקרימיננטה של  $f$ .)

### שאלה 11

יהי  $f$  פולינום אי פריק ממעלה 4 מעל  $\mathbb{Q}$  עם שורש ממשי חיובי  $\alpha$ . נניח כי שדה הפיצול של  $f$  מעל  $\mathbb{Q}$  הוא ממימד 24 מעל  $\mathbb{Q}$ . הראו כי  $\alpha$  לא בר בנייה.

### שאלה 12

מצאו את כל שדות הביניים של ההרחבות הבאות. ציירו דיאגרמת תתי שדות מתאימה.

1.  $\mathbb{F}_{256}/\mathbb{F}_2$
2.  $\mathbb{Q}[\sqrt[6]{2}, \rho_6]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$
3.  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}]/\mathbb{Q}$
4.  $\mathbb{Q}[\rho_{24}]/\mathbb{Q}$

(בכל השאלות  $\rho_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ .)

### שאלה 13

יהי  $\psi_{16}$  הפולינום הציקלוטומי ה-16. פרקו את  $\psi_{16}$  מעל  $\mathbb{Q}[\rho_8]$  באשר  $\rho_8 = \exp\left(\frac{2\pi i}{8}\right)$ .

### שאלה 14

יהי  $E$  שדה הפיצול של  $x^4 - 4x^2 - 6$  מעל  $\mathbb{Q}$ . הראו כי  $\sqrt{10} \in E$  ומצאו את כל האיברים  $\sigma \in \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$  המקיימים  $\sigma(\sqrt{10}) = -\sqrt{10}$ .

### שאלה 15

יהי  $f$  פולינום אי פריק ספרבילי מעל שדה  $F$  ויהי  $K$  שדה פיצול של  $f$  מעל  $F$ . יהיו  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  השורשים של  $f$  ב- $K$ . הוכיחו:

- א.  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^k \in F$  לכל  $k \in \mathbb{N}$ .
- ב. נניח כי  $n = 4$ , אזי  $[F[(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4)]: F] \leq 3$ .
- ג. בסעיף ב, האם ייתכן ש- $[F[(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4)]: F] = 2$ ? מדוע?

## שאלה 16

- מצאו תת שדה  $K \subseteq \mathbb{Q}[\rho_{11}]$  המקיים  $[K:\mathbb{Q}] = 2$ . כמה שדות כאלה יש?
- הראו כי ההרחבה  $\mathbb{Q}[\rho_{11}]/K$  היא הרחבת גלואה ציקלית ממימד 5, אך לא קיים איבר  $a \in \mathbb{Q}[\rho_{11}]$  כך ש- $\mathbb{Q}[\rho_{11}] = K[a]$  וגם  $a^5 \in K$  (רמז: הראו כי  $\rho_5 \notin \mathbb{Q}[\rho_{11}]$ ).

## שאלה 17

יהי  $\psi_n$  הפולינום הציקלוטומי ה- $n$ . יהי  $E$  שדה הפיצול של  $\psi_5(x)\psi_7(x)$  מעל  $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ . חשבו את  $[E:\mathbb{Q}]$ . (רמז:  $\rho_3 \in \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ ).

## שאלה 18

יהי  $F$  שדה ויהיו  $K, L$  שדות המכילים את  $F$  ומוכלים בשדה גדול יותר  $E$ . נניח כי  $K/F, L/F$  הרחבות גלואה ממימד סופי עם חבורת גלואה אבלית. הוכיחו או הפריכו:  $KL/F$  היא הרחבת גלואה עם חבורת גלואה אבלית.

## שאלה 19

נתונה הטענה (הנכונה) הבאה: לכל  $n \in \mathbb{N}$  קיימת הרחבת גלואה  $E/F$  כך ש- $Gal(E/F) \cong S_n$ .

הוכיחו בעזרת הטענה: לכל חבורה סופית  $G$  קיימת הרחבת גלואה  $E/F$  כך ש- $Gal(E/F) \cong G$ . (רמז: משפט קיילי.)

# שאלות העשרה

השאלות הבאות חורגות מהחומר של הקורס (לפחות השנה), אך יש לכם את הכלים לפתור אותן. הנושאים המוצגים בהם כוללים: הוכחת משפטים, דוגמאות נגדיות למשפטים, בניית מיוחדות וגם כמה נושאים מתקדמים יותר.

## שאלה A (נורמה ועקבה)

תהי  $K/F$  הרחבת שדות ממימד סופי. יהי  $a \in K$ . נגדיר העתקה לינארית  $T_a: K \rightarrow K$  ע"י  $T_a(x) = ax$ . נתייחס את  $T_a$  כאל העתקה לינארית מעל  $F$ . מגדירים:  $\text{tr}(a) = \text{tr}(T_a)$  ו- $N(a) = \det(T_a)$ .

- הוכיחו:  $\text{tr}(a) + \text{tr}(b) = \text{tr}(a + b)$  ו- $N(a)N(b) = N(ab)$  לכל  $a, b \in K$ .
- הוכיחו כי הפולינום המינימלי של  $a$  מעל  $F$  שווה לפולינום המינימלי של  $T_a$ .
- הוכיחו כי הפולינום האופייני של  $T_a$  הוא חזקה של הפולינום המינימלי של  $a$  מעל  $F$ . (רמז: יש משפט שאומר שהגורמים הראשוניים של הפולינום האופייני של העתקה לינארית זהים לגורמים הראשויים של הפולינום המינימלי שלה.)
- נניח כי  $K/F$  גלואה ו- $G = Gal(K/F)$ . הוכיחו ו- $N(a) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(a)$  ו- $\text{tr}(a) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(a)$ .

### שאלה B (דוגמא נגדית למשפט האבר הקדום בהרחבה לא ספרבילית)

יהי  $F$  שדה ממאפיין  $p > 0$ . נגדיר  $L = F(s, t)$  (שדה השברים של  $F[s, t]$ ) ויהי  $K = F(s^p, t^p)$  (שדה השברים של  $F[s^p, t^p]$ ). באופן טבעי  $K \subseteq L$ .

1. הוכיחו כי  $[L:K] = p^2$ .
2. הוכיחו כי לכל  $a \in L$  מתקיים  $[K[a]:K] \in \{1, p\}$ . הסיקו כי לא קיים  $a \in L$  עבורו  $L = K[a]$ .
3. נניח כי  $F$  אינסופי. הראו כי יש אינסוף שדות ביניים  $K \subsetneq E \subsetneq L$ . (השוו לשאלה 4).

### שאלה C (הוכחת משפט האבר הקדום)

תהי  $L/F$  הרחבת שדות ספרבילית ממימד סופי.

1. הראו כי אם  $F$  סופי אז קיים  $a \in L$  כך ש- $L = F[a]$ .
2. נניח כי  $F$  אינסופי. הראו כי אם  $V$  מ"ו ממימד סופי מעל  $F$  ו- $U_1, U_2, \dots, U_t \subsetneq V$  הם תתי מרחבים, אז  $V \neq \cup_{i=1}^t U_i$ .
3. העזרו בשאלה 4 ובסעיף 2 כדי להוכיח שאם  $F$  אינסופי אז קיים איבר  $a \in L$  כך ש- $L = F[a]$ .

### שאלה D (הרחבת גלואה ממימד 3 של המספרים הרציונלים)

בתרגיל זה נראה כיצד לבנות הרחבת גלואה ממימד 3 מעל  $\mathbb{Q}$ .

יהי  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  פולינום אי פריק ממעלה 3 מעל  $\mathbb{Q}$  והיו  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$  שורשי  $f$ . נגדיר  $d = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)$  ויהי  $E = \mathbb{Q}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ .

1. הוכיחו כי  $D := d^2 \in \mathbb{Q}$ . ( $D$  נקרא גם הדיסקרימיננטה של  $f$ ).
2. הראו כי אם  $[E:\mathbb{Q}] = 6$  אז  $d \notin \mathbb{Q}$ . (רמז: מה הצמודים של  $d$ ?)
3. הראו כי אם  $[E:\mathbb{Q}] = 3$  אז  $d \in \mathbb{Q}$ .
4. הסיקו כי  $[E:\mathbb{Q}] = 3$  אם  $D$  הוא ריבוע ב- $\mathbb{Q}$ .
5. נניח כי  $f(x) = x^3 + qx + p$ . הוכיחו כי  $D = -4p^3 - 27q^2$ .
6. העזרו בסעיפים 4 ו-5 כדי לבחור  $p, q$  כך ש- $[E:\mathbb{Q}] = 3$ . (זהירות:  $f$  צריך להיות אי פריק).
7. הוכיחו כי לא קיים  $a \in E$  כך ש- $E = \mathbb{Q}[a]$  וגם  $a^3 \in \mathbb{Q}$ .

**הערה:** זו שאלה פתוחה אילו חבורות יכולות להתקבל כחבורות גלואה של הרחבות גלואה של  $\mathbb{Q}$ . התרגיל הזה מדגים כמה קשה הבעיה הזו.