תרגול 8

31 יולי, 2016

המשך תרגיל משיעור קודם:

חישבנו נוסחת איטרציה עבור שיטת יעקובי –

$$\overrightarrow{x_{n+1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix} * \overrightarrow{x_n} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כאשר –

$$\overrightarrow{x_n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_{n+1}} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$$

ויהי הניחוש - $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

נבצע 6 איטרציות:

רכיבי הווקטור x	ניחוש התחלתי x_0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	0.5	0.2	0.45	0.324	0.429	0.376
y_n	0	0.6	0.1	0.352	0.142	0.248	0.16
z_n	0	1	0.52	0.92	0.718	0.886	0.802

■

תזכורת (שיטת יעקובי):

$$A = \underbrace{L}_{\text{משולשית תחתונה}} + \underbrace{D}_{\text{אלכסונית}} + \underbrace{U}_{\text{משולשית עליונה}}$$

נציב במערכת המשוואות –

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\big((L+U)+D\big)\vec{x} = \vec{b}$$

$$(L+U)\vec{x} + D\vec{x} = \vec{b}$$

$$D\vec{x} = \vec{b} - (L+U)\vec{x}$$

$$\boxed{\vec{x} = D^{-1}\vec{b} - D^{-1}(L+U)\vec{x}}$$

כאשר דורשים ש – $a_{11}, \dots, a_{nn} \neq 0$ וזה קורה אם ורק אם $\|D\| \neq 0$.

$$=> B = -D^{-1}(L+U), \vec{c} = D^{-1}\vec{b}$$

תרגול 8

31 יולי, 2016

שיטת גאוס – זיידל

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

$$[(L+D)+U]\vec{x}=\vec{b}$$

$$(L+D)\vec{x}+U\vec{x}=\vec{b}$$

$$(L+D)\vec{x}=\vec{b}-U\vec{x}$$

$$\boxed{\vec{x}=(L+D)^{-1}\vec{b}-(L+D)^{-1}U\vec{x}}$$

בכתיב נוסף –

$$\overrightarrow{\underbrace{x_{n+1}}_{new}}=(L+D)^{-1}*\vec{b}-(L+D)^{-1}*U*\overrightarrow{x\underbrace{_{n}}_{old}}$$

$$=>B=-(L+D)^{-1}U\,,\vec{c}=(L+D)^{-1}\vec{b}$$

<u>הערה:</u>

גאוס-זיידל מהירה יותר מבחינת התכנסות מיעקובי, אך יש מקרים שבהם גאוס-זיידל לא מתכנס ויעקובי כן תתכנס!

<u>תרגיל:</u>

נותנה המערכת –

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&3&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\8\\-5\end{pmatrix}$$

בצע שתי איטרציות בשיט גאוס-זיידל, כאשר וקטור התחלתי הינו - $\overrightarrow{x_0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

<u>פתרון:</u>

נפרק את A לשלוש המטריצות כפי שמתואר בשיטה –

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix},L=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix},U=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

נוסחת גאוס-זיידל:

$$\overrightarrow{x_{n+1}}=-(L+D)^{-1}*U*\overrightarrow{x_n}+(L+D)^{-1}*\vec{b}$$

תרגול 8

נחשב את המקדמים –

$$(L+D)=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&3&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$=>(L+D)^{-1}=\begin{pmatrix}0.5&0&0\\0.1667&0.3333&0\\0.0833&0.1667&0.5\end{pmatrix}$$

$$=>(L+D)^{-1}\vec{b}=\begin{pmatrix}0.5&0&0\\0.1667&0.3333&0\\0.0833&0.1667&0.5\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\8\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\2.833\\-1.0833\end{pmatrix}$$

ונחשב גם את -

$$-(L+D)^{-1}U=-\begin{pmatrix}0.5&0&0\\0.1667&0.3333&0\\0.0833&0.1667&0.5\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0.5&0\\0&0.1667&0.333\\0&0.0833&0.1667\end{pmatrix}$$

ולכן –

$$\boxed{\overrightarrow{x_{n+1}}=\begin{pmatrix}0&0.5&0\\0&0.1667&0.333\\0&0.0833&0.1667\end{pmatrix}\overrightarrow{x_n}+\begin{pmatrix}0.5\\2.833\\-1.0833\end{pmatrix}}$$

נבצע כמה איטרציות –

$$\overrightarrow{x_0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$=>\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}0.5\\2.833\\-1.0833\end{pmatrix}=>\overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix}1.9167\\2.9445\\-1.0279\end{pmatrix}=>\overrightarrow{x_3}=\begin{pmatrix}1.9723\\2.9816\\-1.0094\end{pmatrix}=>$$

$$=>\cdots=>\overrightarrow{x_8}=\begin{pmatrix}1.9999\\3.000\\-1.0002\end{pmatrix}$$

כאשר הערך האמיתי הינו $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$.

■

תרגול 8

31 יולי, 2016

שאלה:

האם ניתן לפתור את המערכת הבאה בעזרת גאוס זיידל או יעקובי.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \boxed{3} & 5 \\ 2 & 4 & \boxed{8} & 0 & 14 \\ 2 & \boxed{6} & 1 & 1 & 10 \\ \boxed{5} & 3 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

פתרון:

נרצה שלמטריצה A יהיה תנאי של אלכסון שולט. לכן –

$$R_1 \leftrightarrow R_4 \,, R_3 \leftrightarrow R_2 \;=> \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{cccc} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}}_{A'} & \begin{array}{c} 9 \\ 10 \\ 14 \\ 5 \end{array} \end{array}\right)$$

ונשים לב כי אכן מתקיים תנאי של אכלסון שולט עבור A' –

$$|5| > |3| + |0| + |1|$$

$$|6| > |2| + |1| + |1|$$

$$|8| > |4| + |2| + |0|$$

$$|3| > |1| + |1| + |0|$$

נשים לב כי המשוואה לא השתנתה ולכן עכשיו שיש תנאי אלכסון שולט, ניתן לבצע את שיטות גאוס-זיידל או יעקובי והן יתכנסו לכל ניחוש התחלתי.

■

הערות:

1) תנאי אלכסון שולט => 2 השיטות יתכנסו!

2) אם התנאי האלכסון השולט לא מתקיים זה לא אומר שהשיטה לא תתכנס, ולכן צריך לבדוק אם $\|B\| < 1$, לפי הנורמות הידועות (L_1, L_2, L_∞ - לא משנה).

$$B =_{\text{גאוס זיידל}} - (L + D)^{-1}U \,, B =_{\text{יעקובי}} - D^{-1}(L + U)$$

3) יש תנאי הכרחי ומספיק –

$$\max(\rho(B)) < 1$$

שהוא גורר התכנסות.

4) גאוס-זיידל מהיר יותר, אבל יש מקרים שגאוס-זיידל לא יעבוד ואומנם יעקובי כן.

תרגול 8

31 יולי, 2016

פירוק QR

לכל מטריצה A בעלת עמודות בת"ל יש פירוק –

$$A = Q * R$$

כאשר:

Q – מטריצה אורתוגונלית.

R – מטריצה משולשית עליונה.

שיטת QR בעזרת $householder$:

$$\|\vec{x}\| = \alpha \, , \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

נסמן - $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (אורכו הוא n) ונקבל –

$$u = \vec{x} - \alpha e_1 \, , v = \frac{u}{\|u\|}$$

ובעזרת שיטת $householder$ נקבל –

$$Q = I - 2vv^T$$

תרגיל:

נתונה המטריצה –

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

מצאו פירוק QR.

פתרון:

נעשה לפי התהליך –

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$=> \|x\| = \alpha = \sqrt{12^2 + 6^2 + (-4)^2} = 14$$

$$=> \ \alpha e_1 = 14 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=> u = x - \alpha e_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$=> v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} * \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

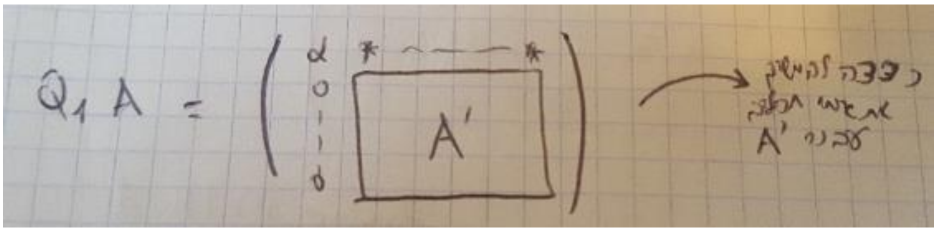
לכן –

$$Q_1 = I - 2vv^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

וכעת –

$$Q_1 * A = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

ואכן -



באופן כללי –

$$Q = Q_1 * Q_2 * \dots * Q_t$$

$$R = Q_t * \dots * Q_2 * Q_1 * A$$

לכן –

$$A' = \begin{pmatrix} -49 & -14 \\ 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$=> \vec{x} = \begin{pmatrix} -49 \\ 168 \end{pmatrix}$$

$$=> \|\vec{x}\| = \alpha = \sqrt{2401 + 28224} = 175$$

$$=> u = x - \alpha e_2 = \begin{pmatrix} -49 \\ 168 \end{pmatrix} - 175 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -224 \\ 168 \end{pmatrix}$$

$$=> v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{280} \begin{pmatrix} -224 \\ 168 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -28 \\ 21 \end{pmatrix}$$

לכן נקבל –

$$Q_2' = I - 2vv^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{1225} \begin{pmatrix} -28 \\ 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{225} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$$

וכעת צריך לעשות –

$$Q_2 = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & Q_2' \end{array} \right)$$

$$=> Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{225} & \frac{24}{25} \\ 0 & \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$$

ולכן –

$$Q = Q_1 * Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{69}{175} & \frac{58}{175} \\ \frac{3}{7} & \frac{158}{175} & -\frac{6}{175} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{35} & \frac{33}{35} \end{pmatrix}$$

$$R = Q_2 * Q_1 * A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}$$

■

תרגול 8

31 יולי, 2016

power method

v_i ו"ע :

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

$$=> Ax = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n v_n$$

$$=> A^2 x = \alpha_1 \lambda_1^2 v_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 v_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^2 v_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$=> A^k x = \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \alpha_2 \lambda_2^k v_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k v_n$$

נניח ש - λ_1 הע"ע המקסימאלי ולכן –

$$\lambda_1^k * \left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \cdots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n\right) = A^k x$$

נשים לב כי לכל $i = 2, \dots, n$ מתקיים - $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k < 1$ מאחר ו - λ_1 הע"ע המקסימאלי.

כעת –

$$\lim_{k \to \infty} A^k x = \lambda_1^k * \alpha_1 * v_1$$

כעת –

$$u_k = \frac{A^k x}{\|A^k x\|_\infty} = \frac{\lambda_1^k * \alpha_1 * v_1}{\left\| \underbrace{\lambda_1^k * \alpha_1}_{\text{סקלר}} * v_1 \right\|_\infty} = \frac{v_1}{\|v_1\|_\infty}$$

$$=> u_k = \frac{A u_{k-1}}{\|A u_{k-1}\|_\infty} \quad , \qquad A u_{k-1} = \lambda u_{k-1}$$

$$=> \lambda_1 = \frac{\|A u_{k-1}\|_\infty}{\|u_{k-1}\|_\infty}$$