ב"ש בדידה תשעט מועד א

1. פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תקרא תלולה אם

$$\forall x_1\in\mathbb{R}\exists x_2\in\mathbb{R}\,:\,(x_1<x_2)\wedge(|x_2\cdot f(x_1)|\le f(x_2))$$

פתרון: פונקציה היא תלולה אם לכל x_1 קיים x_2 שהוא גדול ממנו המקיים $|x_2\cdot f(x_1)|\le f(x_2)$. . השלילה הלוגית היא

$$\exists x_1\in\mathbb{R}\forall x_2\in\mathbb{R}\,:\,(x_1\ge x_2)\vee(|x_2\cdot f(x_1)|>f(x_2))$$

(א) האם $f(x)=x^2$ תלולה?
פתרון: כן. יהא x_1 ממשי. צריך להוכיח שקיים $x_1<x_2$ המקיים $|x_2\cdot f(x_1)|\le f(x_2)$. כלומר מקיים

$$|x_2|\,(x_1)^2\le(x_2)^2$$

ואם נחפש רק x_2 חיוביים נקבל שצריך להתקיים

$$(x_1)^2\le x_2$$

נגדיר $x_2=\max\left\{(x_1)^2,|x_1|\right\}$ ואז נקבל ש $x_1\le x_2$ והוא אי-שלילי. אם $x_2=0$ אז $|x_2|\,(x_1)^2\le(x_2)^2$ מתקיים (שני הצדדים שווים אפס). ואם $x>0$ אז לפי הגדרתו

$$(x_1)^2\le x_2$$

ולכן

$$|x_2|\,(x_1)^2\le(x_2)^2$$

(כפל במספר חיובי שומר אי-שיווין). קיבלנו את הדרוש.

(ב) האם $f(x)=\frac{1}{x}$ תלולה?
פתרון: לא. למשל עבור $x_1=1$ נוכיח ש

$$\forall x_2\in\mathbb{R}\,:\,(x_1\ge x_2)\vee(|x_2\cdot f(x_1)|>f(x_2))$$

(המשך שלילת הפסוק המגדיר פונקציה תלולה). יהא x_2 ממשי. אם $x_2\ge x_1$ סיימנו. אחרת $x_2>x_1=1$ ונראה שמתקיים $|x_2\cdot f(x_1)|>f(x_2)$. כלומר, צריך להוכיח שעבור $x_2>1$ מתקיים

$$\left|x_2\cdot 1^2\right|>\frac{1}{x_2}$$

או בפשטות (כי x_2 חיובי) ש $\frac{1}{(x_2)^2} < 1$ וזה אכן מתקיים כ $1 < x_2$ גורר ש $\frac{1}{x_2} < 1$ והעלה בריבוע שומרת על אי-השיוויון כי כל חיובי.

(ג) האם $f(x) = \sin(x)$ תלולה?
פתרון: לא. למשל עבור $x_1 = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ מקיים כי $f(x_1) = 1$ ונוכיח ש

$$\forall x_2 \in \mathbb{R} : (x_1 \geq x_2) \vee (|x_2 \cdot f(x_1)| > f(x_2))$$

(המשך שלילת הפסוק המגדיר פונקציה תלולה). יהא x_2 ממשי. אם $x_1 \geq x_2$ סיימנו. אחרת $2\pi + \frac{\pi}{2} = x_1 < x_2$ ונראה שמתקיים $|x_2 \cdot f(x_1)| > f(x_2)$. כלומר, צריך להוכיח שעבור $2\pi + \frac{\pi}{2} < x_2$ מתקיים

$$\left|x_2 \cdot 1^2\right| > \sin(x_2)$$

או בפשטות (כי x_2 חיובי) ש $x_2 > \sin(x_2)$ וזה אכן מתקיים כ $\sin(x_2) \leq 1 < 2\pi + \frac{\pi}{2} < x_2$.

2. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל שלוש קבוצות A, B, C אם $A \backslash (B \cap C) = A$ אזי $(A \cap B) \backslash C = A \cap B$.
פתרון: הוכחה: בהנחה ש $A \backslash (B \cap C) = A$נוכיח ש $(A \cap B) \backslash C = A \cap B$ בהכלה דו כיוונית.
תמיד מתקיים $(A \cap B) \backslash C \subseteq A \cap B$ ולכן נוכיח $(A \cap B) \backslash C \supseteq A \cap B$. יהא $x \in A \cap B$. נרצה להוכיח ש $x \notin C$ ואז $x \in (A \cap B) \backslash C$. נניח בשלילה כי $x \in C$ אז $x \in A, x \in B, x \in C$ ולכן $x \in A$ וגם $x \in (B \cap C)$ ולכן $x \notin A \backslash (B \cap C)$ מההנחה נקבל ש $x \notin A$ וקיבלנו סתירה.

(ב) לכל שלוש קבוצות A, B, Cמתקיים $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cap C)$.
פתרון: הפרכה: $A = C = \{1\}, B = \emptyset$ אזי

$$A \backslash (B \cap C) = A \backslash \emptyset = A$$

לעומת זאת

$$(A \backslash B) \backslash C = A \backslash C = A \backslash A = \emptyset$$

ומכיוון ש $A \neq \emptyset$, השיוויון שבשאלה לא מתקיים.

(ג) לכל קבוצה A מתקיים $P(A) \backslash A = P(A)$.
פתרון: הפרכה: $A = \{\emptyset\}$ ואז

$$P(A) = \{\emptyset, A\}$$

ולכן

$$P(A) \backslash A = \{\emptyset, A\} \backslash \{\emptyset\} = \{A\} \neq P(A)$$

3. הוכיחו באינדוקציה (רגילה או מלאה) כי לכל n מתקיים $n^3 + 2n$ מתחלק ב 3 ללא שארית.
פתרון: הוכחה:

- בסיס $n = 1$: אכן, $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ מתחלק ב 3 ללא שארית.
- צעד: נניח נכונות עבור n, כלומר, $n^3 + 2n$ מתחלק ב 3 ללא שארית. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר, $(n+1)^3 + 2(n+1)$ מתחלק ב 3 ללא שארית. מתקיים

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = \left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) + 2(n+1) = \left(n^3 + 2n\right) + 3\left(n^2 + n + 1\right)$$

ומכיוון ש $\left(n^3 + 2n\right)$מתחלק ב 3 ללא שארית (הנחת האינדוקציה) וגם $3\left(n^2 + n + 1\right)$ מתחלק ב 3 ללא שארית אז גם הסכום שלהם מתחלק ב 3 ללא שארית.

4. תהיינה $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $f\circ g$ הפיכה וגם $f\circ f$ הפיכה אז g הפיכה.
פתרון: הוכחה:
כיוון ש $f\circ f$ הפיכה אז בפרט היא חח"ע ועל ולכן f ("הימנית") חח"ע ו f ("השמאלית") על. קיבלנו ש f חח"ע +על ולכן הפיכה ולכן קיימת f^{-1}. מכיוון ש $f\circ g$ הפיכה אז

$$g=f^{-1}\circ(f\circ g)$$

הפיכה כהרכבה של פונקציות הפיכות.

(ב) אם $f\circ g\circ f$ הפיכה אזי f,g הפיכות.
פתרון: הוכחה:
כיוון ש $f\circ g\circ f$ הפיכה אז בפרט היא חח"ע ועל ולכן f ("הימנית") חח"ע ו f ("השמאלית") על. קיבלנו ש f חח"ע +על ולכן הפיכה ולכן קיימת f^{-1}. מכיוון ש $f\circ g\circ f$ הפיכה אז

$$g=f^{-1}\circ(f\circ g\circ f)\circ f^{-1}$$

הפיכה כהרכבה של פונקציות הפיכות.

(ג) אם f חח"ע אזי גם $f+f\circ f$ חח"ע.
פתרון: הפרכה: נגדיר

$$f(n)=\begin{cases}n & n\geq 3\\ 1 & n=2\\ 2 & n=1\end{cases}$$

והיא חח"ע ומתקיים:

$$f\left(f(n)\right)=\begin{cases}n & n\geq 3\\ 2 & n=2\\ 1 & n=1\end{cases}$$

כלומר $f\circ f=Id$. לכן

$$\left(f+f\circ f\right)(n)=f(n)+(n)=\begin{cases}2n & n\geq 3\\ 3 & n=2\\ 3 & n=1\end{cases}$$

שהיא אינה חח"ע (התמונה של 1 ו 2 שווה) .

5. כמה פתרונות שלמים אי-שליליים יש למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$ כך ש:

(א) $x_1+x_2=5$.
פתרון: נקבל את השאלה: כמה פתרונות שלמים אי שליילים יש למשוואה

$$5+x_3+x_4+x_5=10$$

או

$$x_3+x_4+x_5=5$$

ולכך יש $\binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}$

(ב) $x_1 \le 5$ וגם $x_2 \le 5$.

פתרון: נסמן ב U את קבוצת כל הפתרונות האי-שליליים למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$. ברור ש $|U| = \binom{10+5-1}{5-1} = \binom{14}{4}$. עוד נסמן A_i ($1 \le i \le 2$) להיות קבוצת הפתרונות האי-שליליים למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 10$ עם התנאי ש $x_i \ge 6$. למשל A_1 קבוצות כל הפתרונות האי-שליליים למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 10$ כך ש $x_1 \ge 6$. נגדיר $y_1 = x_1 - 6$ ונקבל ש A_1 היא קבוצת כל הפתרונות האי-שליליים למשוואה $(y_1+6)+x_2+x_3+x_4+x_5 = 10$ או

$$y_1+x_2+x_3+x_4+x_5=4$$

שזה $|A_1| = \binom{4+5-1}{5-1} = \binom{8}{4}$. באופן דומה גם $|A_2| = \binom{4+5-1}{5-1} = \binom{8}{4}$ וחיתוך של שניהם הוא

$$|A_1 \cap A_2| = \emptyset$$

כי לא ייתכן שגם x_1 וגם x_2 לפחות 6 והסכום הכולל יהיה שווה 10. כעת נרצה לחשב את $\left|\cap_{i=1}^2 A_i^c\right|$:

$$\left|\cap_{i=1}^2 A_i^c\right| = \left|\left(\cup_{i=1}^2 A_i\right)^c\right| = |U| - \left|\cup_{i=1}^2 A_i\right| = |U| - \left[\sum_{i=1}^2 |A_i| - |A_1 \cap A_2|\right] =$$

$$= \binom{14}{4} - \left[2\binom{8}{4} - 0\right] = \binom{14}{4} - 2\cdot\binom{8}{4}$$

(ג) $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$.

פתרון: נשים לב שעבור

$$x_1 = 0, x_2 = 1, \ldots, x_5 = 4$$

מתקיים

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 0+1+2+3+4 = 10$$

ולכן זה פתרון. בנוסף, אם נעלה אחד מה x_i ים באחד זה כבר לא יהיה פתרון לכן יש פתרון יחיד לשאלה.