

תזכורת: עבור  $\alpha > 1$  מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = \infty$  ועבור  $|\alpha| < 1$  מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$

1. עבור הסדרות הבאות, מצא האם קיים גבול, ואם כן מצא אותו והוכח שהוא אכן הגבול (בשימוש בהגדרת הגבול, שלילת גבול או אריתמטיקה של גבולות):

א.  $\frac{1}{\sqrt{n}}$

ב.  $\frac{1}{n} \sin(n!)$

ג.  $\frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$

ד.  $\frac{3^{n-1}}{2^n}$

ה.  $\frac{3^n}{2^{(n^2)}}$

2. הוכח:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

3. הוכח: אם  $a_n$  מתכנסת אזי היא חסומה מלעיל ומלרע

4. הוכח/הפוך:

א. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

ב. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ , אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

ג. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$  ו  $a_n$  מתכנסת, אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

ד. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  אזי  $b_n = \frac{1}{a_n}$  מתכנסת במובן הרחב לאינסוף או למינוס אינסוף.

ה. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  אזי  $b_n = \left| \frac{1}{a_n} \right|$  מתכנסת במובן הרחב לאינסוף.

ו. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

5. תהי  $a_n$  סדרה מתכנסת לגבול ממשי  $L \in \mathbb{R}$ . תהי  $b_n$  סדרה חסומה שאינה מתכנסת. הוכח:  
הסדרה  $c_n = a_n b_n$  מתכנסת אם"ם  $L = 0$

6. תהי  $\{b_n\}$  סדרה יורדת (כל איבר קטן או שווה לקודמו). הוכח ש  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$

7. תהי  $\{a_n\}$  סדרה המתכנסת ל  $L < 0$ . הוכח ש  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \sqrt{L}$

8. הוכח/הפוך:  $\{a_n\}$  מתכנסת  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$

9. מצא את גבול הסדרה  $\sqrt[n]{a}$  עבור  $a \in \mathbb{R}$  ו  $0 \leq a$  והוכח שהוא אכן הגבול. רמזים:

\* הפרד בין מקרים שונים של  $a$

\* חוק הסנדביץ: אם  $a_n \rightarrow L$  ו  $b_n \rightarrow L$  ו  $a_n \leq c_n \leq b_n$  אזי  $c_n \rightarrow L$ . השתמש בחוק זה ובגבולות של סדרות שלמדנו

\* אריתמטיקה של גבולות