

## תרגיל בית 6

1. הוכיחו כי לא כל הקבוצות המדידות לבג ב  $\mathbb{R}$  מדידות בורל וכי לא כל פונקציה קציפה מעתיקה קבוצה מדידה לבג לקבוצה מדידה לבג.

הדרכה:

- א. הגדירו את הפונקציה  $g = \varphi + x$  המוגדרת על הקטע  $[0,1]$  כאשר  $\varphi$  הינה פונקצית קנטור אשר הגדרנו בכיתה. הראו כי  $g$  רציפה, חד חד ערכית, עולה ממש ועל  $[0,2]$ .
- ב. הראו כי  $g([0,1] \setminus C)$  הינה קבוצה פתוחה עם מידת לבג 1. מכאן שלקבוצה  $g(C)$  מידה 1 כאשר  $C$  הינה קבוצת קנטור.
- ג. השתמשו בעובדה כי אם  $E$  הינה קבוצה עם מידה חיובית אזי קיימת קבוצה  $M \subseteq E$  כך ש  $M$  איננה מדידה לבג (לא למדנו את זה אבל זה נכון) והראו כי קיימת קבוצה לא מדידה ב  $[0,2]$  כך ש  $K = g^{-1}(M)$  הינה מדידה לבג.
- ד. הראו כי  $K$  איננה מדידה בורל וכי  $g(K) = M$ .

2. נניח  $\mu$  הינה מידה סופית. הוכיחו כי פונקציה מדידה ואי שלילית הינה אינטגרבילית

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x: f(x) \geq n\}) < \infty$$

אמ"מ