אינפי 4 - תרגיל 3 - בונוס

המטרה של התרגילים הבאים להגדיר אוריינטציה של מסילה באופן מספיק פורמלי ולהוכיח מספר תכונות בסיסיות שלה.

תרגיל 10.1. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה חלקה וחח"ע בעלת תמונה Γ. לכל $\gamma(t)=x\in\Gamma$ נגדיר את וקטור היחידה $T(x)=\frac{\gamma\prime(t)}{\|\gamma\prime(t)\|}$.
הוכיחו ש $T:\Gamma\to\mathbb{R}^n$ היא פונקציה רציפה.

הגדרה 10.2. הפונקציה T נקראת אוריינטציה המושרית על ידי γ והזוג (Γ,T) נקרא עקומה מכוונת.

תרגיל 10.3. תהיינה γ,δ עקומות שקולות עם תמונה Γ. תהי T האוריינטציה המושרית על ידי γ ו S האוריינטציה המושרית על ידי δ. הוכיחו ש $T=S$. (רמז: תשתמשו בהגדרה של שקילות עקומות, של האורינציה המושרית מהשאלה הקדומת ובכלל שרשרת).

בתרגיל הבא, נמצא את כל הפרמטריזציות החלקות של של מסילות פשוטות, עד כדי שקילות.

תרגיל 10.4. תהיינה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $\delta:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ פרמטריזציות חלקות וחח"ע של העקומה Γ כך ש $\gamma(a)=\delta(c)$ ו $\gamma(b)=\delta(d)$.

1. הוכיחו ש $\delta^{-1}\circ\gamma:[a,b]\to[c,d]$ מוגדרת היטב.
2. הוכיחו ש $\delta^{-1}\circ\gamma:[a,b]\to[c,d]$ מונוטונית עולה ממש.
3. הוכיחו ש $\delta^{-1}\circ\gamma:[a,b]\to[c,d]$ גזירה ברציפות והסיקו ש γ ו δ שקולות. (הדרכה: ניתן להוכיח את הטענה לפחות ב 2 דרכים. דרך אחת: מהמשפט מתרגול 1 ידוע ש γ שקולה ל $\tilde{\gamma}$ ו δ שקולה ל $\tilde{\delta}$, כאשר $\tilde{\gamma}$ ו $\tilde{\delta}$ הן עקומות בעלות מהירות יחידה. הראו ש $\tilde{\gamma}$ ו $\tilde{\delta}$ שוות והסיקו ש γ ו δ שקולות. דרך שניה - נסמן $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$. לכל $t\in[c,d]$ הראו שקיים $1\leq i\leq n$ כך ש δ_i חח"ע בסביבה פתוחה (m,n)של t. הראו שקיימת סביבה פתוחה של t וסביבה פתוחה של $\delta_i(t)$ כך δ_i היא פונ' חח"ע ועל בינהן, בעלת נגזרת רציפה שונה מ 0 ובעזרת משפט הפונ' ההפוכה הוכיחו ש δ_i^{-1} אף היא גזירה ברצפות. בעזרת הפונקציות δ_i^{-1}הראו שבכל נקודה של $[a,b]$ קיימת פונ' שגזירה ברציפות ומתלכדת עם $\delta^{-1}\circ\gamma$ ועסיקו את הדרוש).
4. הראו שאם ל Γ קיימת פרמטריזציה חח"ע $\gamma:[a,b]\to\Gamma$, אזי לכל פרמטריזציה חח"ע וחלקה של $\delta:[c,d]\to\Gamma$מתקיים $\delta(c)=\gamma(a)$ ו $\delta(d)=\gamma(b)$ או $\delta(c)=\gamma(b)$ ו $\delta(d)=\gamma(a)$ והסיקו של Γ קיימות בדיוק 2 פרמטריזציות חלקות וחח"ע עד כדי שקילות. הסיקו של Γ יש בדיוק 2 אוריינטציות אפשריות.