

תרגיל מספר 8:

הגשה בתירגול שאחרי חופשת הפסח.

שאלה 1:

תהי $\Omega \neq \emptyset$. יהי $E \neq \emptyset$ אוסף כלשהו של תת-קבוצות ב Ω . יהי B אוסף כל הסיגמה-אלגבראות של Ω המכילות את E .

- א. יהי \mathbb{A}_Ω אוסף כל תת- הקבוצות של Ω . הוכיחו כי \mathbb{A}_Ω סיגמא-אלגברה. הסיקו כי $B \neq \emptyset$.
- ב. נגדיר $\mathbb{A}_E = \bigcap_{A \in B} A$. הוכיחו כי \mathbb{A}_E היא סיגמא-אלגברה.
- ג. הוכיחו כי \mathbb{A}_E היא הסיגמא-אלגברה המינימלית המכילה את E .

שאלה 2:

תהי $\Omega \neq \emptyset$, ותהי \mathbb{A} סיגמא-אלגברה מעל Ω . הוכיחו כי:

- א. $\emptyset, \Omega \in \mathbb{A}$.
- ב. תהי I קבוצת אינדקסים בת-מניה. אם $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{A}$ באשר $A_i \subseteq \Omega$ לכל $i \in I$, אזי $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathbb{A}$, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathbb{A}$.
- ג. $A, B \in \mathbb{A}$ אזי $A - B \in \mathbb{A}$.

שאלה 3:

תהי $\Omega \neq \emptyset$ ותהי \mathbb{A} סיגמא-אלגברה מעל Ω . נגדיר את היחס הבא:

דהיינו לכל $X \subseteq \Omega$ ב- \mathbb{A} , אם a שייכת ל- X אז b שייכת ל- X .

- א. הוכיחו כי \sim הוא יחס שקילות. (רפלקסיבי טרנזיטיבי וסימטרי).
- ב. הראו שכל $X \in \mathbb{A}$ ניתן להציג כאיחוד מחלקות שקילות של יחס זה.
- ג. נניח ש- \mathbb{A} אינסופית. הוכיחו כי מספר מחלקות השקילות של \sim לא יכול להיות סופי. הוכיחו בנוסף שקיימת משפחה אינסופית בת-מניה $\{A_1, A_2, \dots\}$ של קבוצות מ- \mathbb{A} כך שלכל A_i קיים $e_i \in \Omega$ כך ש $e_i \in A_i$ אבל $e_i \notin A_j$ לכל $i \neq j$.
- ד. תחת ההנחות של הסעיף הקודם. נגדיר פונקציה $\mathbb{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ באשר $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ קבוצת החזקה של הטבעיים (אוסף כל תת- הקבוצות של הטבעיים) ע"י $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \ni N \mapsto \bigcup_{n \in N} A_n$ הוכיחו כי העתקה זו חח"ע. (שימו לב שסגירות תחת איחוד בן מניה של סיגמא-אלגברה חשוב כאן).
- ה. לאור כל מה שמצאתם בסעיפים (ג) ו-(ד), הוכיחו שלא קיימת סיגמא-אלגברה \mathbb{A} אינסופית כך ש \mathbb{A} היא בת מניה.

שאלה 4:

יהי (Ω, \mathbb{A}, P) מרחב הסתברות. הוכיחו:

1. לכל $A, B \in \mathbb{A}$ מתקיים $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
2. לכל $A, B \in \mathbb{A}$ כך ש $A \supseteq B$ מתקיים $P(A) \geq P(B)$.
3. אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{A}$ כך ש $A_i \subseteq A_{i+1}$ לכל i אזי $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$.
4. אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{A}$ כך ש $A_{i+1} \subseteq A_i$ לכל i אזי $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$.

שאלה 5:

- א. תהי $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ סיגמא-אלגברה. על X תהי $Y \subseteq X$ תת-קבוצה. קבעו האם $\{A \in \mathbb{A} : A \subseteq Y\}$ ו- $\{A \cap Y : A \in \mathbb{A}\}$ הן אלגבראות סיגמא. כיצד תשתנה תשובתכם אם נתון בנוסף ש $Y \in \mathbb{A}$.
- ב. יהי (Ω, \mathbb{A}, P) מרחב הסתברות. ותהי $B \in \mathbb{A}$ כך ש $P(B) > 0$. נגדיר (B, \mathbb{A}_B, P_B) באופן הבא: $\mathbb{A}_B = \{A \cap B \mid A \in \mathbb{A}\}$ ולכל קבוצה $C \in \mathbb{A}_B$ נגדיר $P_B(C) = P(C)/P(B)$. הוכיחו כי (B, \mathbb{A}_B, P_B) מרחב הסתברות. (חלק מהשאלה נפתר בתרגול – ההוכחה ש \mathbb{A}_B היא אכן סיגמא-אלגברה. העתיקו את ההוכחה).