<u>מבוא להסתברות וסטטיסטיקה</u>

תרגיל מספר 8:

הגשה בתירגול שאחרי חופשת הפסח.

<u>שאלה 1:</u>

תהי $\Omega \neq \emptyset$. יהי $E \neq \emptyset$ אוסף כלשהו של תת-קבוצות ב – Ω. יהי B אוסף כל הסיגמה-אלגבראות של Ω המכילות את E .

א. יהי $\mathbb{A}_\Omega$ אוסף כל תת- הקבוצות של Ω.הוכיחו כי $\mathbb{A}_\Omega$ סיגמא-אלגברה. הסיקו כי $\mathrm{B} \neq \emptyset$.

ב. נגדיר $\mathbb{A}_\mathrm{E} = \bigcap_{\mathrm{A}\in\mathrm{B}} \mathrm{A}$. הוכיחו כי $\mathbb{A}_\mathrm{E}$ היא סיגמא-אלגברה.

ג. הוכיחו כי $\mathbb{A}_\mathrm{E}$ היא הסיגמא-אלגברה המינימלית המכילה את E.

<u>שאלה 2:</u>

תהי $\Omega \neq \emptyset$, ותהי $\mathbb{A}$ סיגמא –אלגברה מעל Ω . הוכיחו כי :

א. $\emptyset, \Omega \in \mathbb{A}$.

ב. תהי I קבוצת אינדקסים בת-מניה. אם $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{A}$ באשר $A_i \subseteq \Omega$ לכל $i \in I$, אזי $\bigcap_{i\in I} \mathrm{A_i} \in \mathbb{A}$, $\bigcup_{i\in I} \mathrm{A_i} \in \mathbb{A}$.

ג. $A, \mathrm{B} \in \mathbb{A}$ אזי $A - B \in \mathbb{A}$.

<u>שאלה 3:</u>

תהי $\Omega \neq \emptyset$ ותהי $\mathbb{A}$ סיגמא –אלגברה מעל Ω. נגדיר את היחס הבא:

$$a \sim b \iff \forall X \in \mathbb{A} : a \in X \to b \in X$$

דהיינו לכל $X \subseteq \Omega$ ב- $\mathbb{A}$, אם a שייכת ל – X אז $\boldsymbol{b}$ שייכת ל – X .

א. הוכיחו כי ~ הוא יחס שקילות. (רפלקסיבי טרנזיטיבי וסימטרי).

ב. הראו שכל $X \in \mathbb{A}$ ניתן להציג כאיחוד מחלקות שקילות של יחס זה.

ג. נניח ש - $\mathbb{A}$ אינסופית. הוכיחו כי מספר מחלקות השקילות של ~ לא יכול ליהיות סופי. הוכיחו בנוסף שקיימת משפחה אינסופית בת-מניה $\{A_1, A_2, \dots\}$ של קבוצות מ- $\mathbb{A}$ כך שלכל A_i קיים $e_i \in \Omega$ כך ש $e_i \in A_i$ אבל $e_i \notin A_j$ לכל $j \neq i$.

ד. תחת ההנחות של הסעיף הקודם.נגדיר פונקציה $\wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{A}$ באשר $\wp(\mathbb{N})$ קבוצת החזקה של הטבעיים (אוסף כל תת- הקבוצות של הטבעיים) ע"י $\wp(\mathbb{N}) \ni N \longmapsto \bigcup_{n\in N} A_n$ הוכיחו כי העתקה זו חח"ע. (שימו לב שסגירות תחת איחוד בן מניה של סיגמא-אלגברה חשוב כאן) .

ה. לאור כל מה שמצאתם בסעיפים (ג) ו-(ד), הוכיחו שלא קיימת סיגמא-אלגברה $\mathbb{A}$ אינסופית כך ש $\mathbb{A}$ היא בת מניה.

<u>שאלה 4:</u>

יהי $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ מרחב הסתברות. הוכיחו:

1. לכל $A, B \in \mathbb{A}$ מתקיים $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.
2. לכל $A, B \in \mathbb{A}$ כך ש $\mathrm{A} \supseteq \mathrm{B}$ מתקיים $P(A) \geq P(B)$.
3. אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{A}$ כך ש $A_i \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{i}+1}$ לכל i אזי $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$.
4. אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{A}$ כך ש $A_{\mathrm{i}+1} \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{i}}$ לכל i אזי $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$.

<u>שאלה 5:</u>

א. תהי $\mathbb{A} \subseteq \wp(X)$ סיגמא-אלגברה .על X . תהי $Y \subseteq X$ תת-קבוצה. קבעו האם $\{A \in \mathbb{A} : A \subseteq Y\}$ ו- $\{A \cap Y : A \in \mathbb{A}\}$ הן אלגבראות סיגמא. כיצד תשתנה תשובתכם אם נתון בנוסף ש $Y \in \mathbb{A}$.

ב. יהי $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ מרחב הסתברות. ותהי $B \in \mathbb{A}$ כך ש $P(B) > 0$. נגדיר $(\mathrm{B}, \mathbb{A}_B, P_B)$ באופן הבא: $\mathbb{A}_B = \{A \cap B \mid A \in \mathbb{A}\}$ ולכל קבוצה $C \in \mathbb{A}_B$ נגדיר $P_B(C) = P(C)/P(B)$.
הוכיחו כי $(\mathrm{B}, \mathbb{A}_B, P_B)$ מרחב הסתברות . (חלק מהשאלה נפתר בתרגול – ההוכחה ש $\mathbb{A}_B$ היא אכן סיגמא-אלגברה. העתיקו את ההוכחה).