תרגיל 2 - אינפי 4 תשע"ו.

16 במרץ 2016

1 מבוא והוראות.

לפני התרגיל כדאי לעבור על ההרצאה ולקרוא את התרגולים 1, 2 ו 3 כפי שמופיעים באתר. אנחנו מודעים שכתיבה מסודרת לכמות כזרת של תרגילים גוזלת המון זמן, ולכן אתם רשאים לא להגיש חלקים שסומנו כאופציונליים. בכל תרגיל חישובי - מספיק להגיש 50% (מעגלים למעלה) מהסעיפים. אם זאת, כדאי לנסות לפתור את כולם או לפחות להבין את הפתרונות (חידה: מה מתחיל ב"ב"'(מ') ונגמר ב"נ"'?...).

2 מסילות ואוריינטציה

תרגילים 5 ו 6 בחלק זה הם אופציונליים. תרגיל 5 חשוב - לפחות לקבל את המסקנות שלו.

תרגיל 1. הוכח ששקילות מסילות הוא יחס שקילות.

תרגיל 2. הוכח שאם α ו β מסילות שקולות ב $\mathbb{R}^n$ ו α מסילה חלקה, אזי גם β מסילה חלקה.

תרגיל 3. נניח ש $\gamma_2:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ו $\gamma_2:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ פרמטריזציות פשוטות וחלקות של העקומה Γ כך ש

$$\begin{aligned}\gamma_1(a) &= \gamma_2(c)\\ \gamma_1(b) &= \gamma_2(d).\end{aligned}$$

1. הוכיחו ש $\gamma_2^{-1}\circ\gamma_1:(a,b)\to(c,d)$ מוגדרת היטב.
2. הוכיחו ש $\gamma_2^{-1}\circ\gamma_1$ מונוטונית באופן חזק.
3. הוכיחו שאם $\gamma_2^{-1}\circ\gamma_1$מונוטונית, אזי γ_1 ו γ_2 שקולות.

לפני פתרון התרגילים הבאים כדאי לקרוא את תחילת פרק 2.

תרגיל 4. תהיינה γ_1 ו γ_2 פרמטריזציות חלקות וחח"ע של עקומה Γ(בפרט, Γ אינה סגורה). הוכיחו, שאם הן מגדירות את אותה אוריינטציה אזי הן שקולות.

נשים לב, שחח"ע היא וחלקות ההן דרישות חשובות. אם לא היינו דורשים זאת, היינו עלולים לקבל $x=\gamma(t)=\gamma(s)$ עבור $s\neq t$, ואז, אף אחד לא מבטיח, ש $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}=\frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}$. כמו כן, עבור עקומות שאינן חלקות, הפונקציה לא בהכרח מוגדרת. ייתכן ש $\gamma'(t)$אינה קיימת, או $\gamma'(t)$ מתאפסת למשל. בתרגיל הבא, נראה כיצד אפשר בכל זאת להתדבר על מגבלה זו.

הגדרה 1. תהי Γ עקומה עם בעלת פרמטריזציה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ חלקה למקוטעין ופשוטה. הזוג (Γ,γ) נקרא עקומה מכוונת. לכל $\gamma(t)=x\in\Gamma$ וקטור היחדיה (שמוגדר במס' סופי של נקודות)

$$T_\gamma(x)=\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

נקרא אוריינטציה של Γ המושרית על ידי γ.

הגדרה 2. תהי Γ עקומה חלקה, γ_1 ו γ_2הצגות פרמטריות פשוטות וחלקות למקוטעין. נאמר ש $(\Gamma,\gamma_1)=(\Gamma,\gamma_2)$ אם לכל $x\in\Gamma$ בה שתיהם מוגדרים $T_{\gamma_1}(x)=T_{\gamma_2}(x)$ ונאמר ש $(\Gamma,\gamma_1)=-(\Gamma,\gamma_2)$ אם בכל נק' $x\in\Gamma$ בה שתיהם מוגדרים, $T_{\gamma_1}(x)=-T_{\gamma_2}(x)$. בדר"כ כאשר ההקרש ברור נרשום Γ או $-\Gamma$ בהתאמה.

תרגיל 5. תהי (Γ,γ) עקומה מכוונת פשוטה וחלקה למקוטעין. תהי $\tilde{\gamma}$פרמטריזציה פשוטה חלקה למקוטעין של Γ. הוכיחו שמתקיים או $(\Gamma,\gamma)=(\Gamma,\tilde{\gamma})$ או $(\Gamma,\gamma)=-(\Gamma,\tilde{\gamma})$. כלמר, לכל עקומה פשוטה וחלקה למקוטעין קיימות בדיוק שתי אוריינטציות אפשריות.

תרגיל 6. תהי $\gamma_1:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ו $\gamma_2:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ הצגוחת פרמטריות פשוטות, וחלקות למקוטעין של העקומה Γ כך ש ו

$$\begin{aligned}\gamma_1(a)&=\gamma_2(c)\\ \gamma_1(b)&=\gamma_2(d)\\ (\Gamma,\gamma_1)&=(\Gamma,\gamma_2).\end{aligned}$$

הוכיחו או הפריחו: γ_1 ו γ_2 שקולות.

3 אינטגרל קווי מסוג ראשון.

1.3 "תאוריה" וחישובים.

תרגיל 7 ו 8 הם אופציונליים. עם זאת נשתמש במסקנות שלו בהמשך.

תרגיל 7. תהי Γ עקומה ב $\mathbb{R}^n$, γ_1 ו γ_2 פרמטריזציות פשוטות וחלקות למקוטעין, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. הוכיחו:

$$\int_{\gamma_1} f\mathbf{d}l=\int_{\gamma_2} f\mathbf{d}l.$$

במילים אחרות: אינטגרל קווי מסוג ראשון (שם נרדף לאינגרל לפי אורך עקומה) על עקומה חלקה למקוטעין אינו תלוי בפרמטריזציה של Γ. במילים אחרות, אם Γ ניתן חלקה למקוטעין, אזי ניתן לדבר על

$$\int_\Gamma f\mathbf{d}l$$

בלי לציין את הפרמטריזציה או אפילו אוריינטציה של Γ.

תרגיל 8. נאמר ש $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ פשוטה למקוטעין, אם היא חח"ע פרט למספר סופי של נקודות. הוכיחו שהטענה של תרגיל 7 נשארת נכונה אם מחליפים "פשוטה" ב "פשוטה למקוטעין".

תרגיל 9. תהי Γ מסילה בעלת אורך ו f פונקציה חסומה על ידי ממשי חיובי M. הוכיחו שמתקיים

$$\int_{\Gamma} f\mathbf{d}l \leq ML\left(\Gamma\right)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים.

1. $\int_{\Gamma}\left(x+y\right)dl$ **כאשר** $\Gamma=\left\{(x,y):|x|+|y|=1\right\}$
2. $\int_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}\mathbf{d}l$ **כאשר** $\Gamma=\left\{(x,y):x^2+y^2=4x\right\}$
3. $\int_{\Gamma}xyz\mathbf{d}l$ **כאשר** $\Gamma=\left\{(x,y,z):x=t,y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3},z=\frac{1}{2}t^2,0\leq t\leq 1\right\}$

2.3 משמעות "פיסיקלית".

נהוג לתת משמעות "פיסיקלית" לאינגרל קווי מסוג ראשון כמסה של חוט, כאשר "צפיפות המסה" היא הפונקציה, ולחוט יש צורה של העקומה... סיפור נחמד.

תרגיל 10. חשבו:

1. מסה של קשת קו הבורג
$$\left\{(x,y,z)=\left(4\cos t,4\sin t,3t\right):t\in[0,2\pi]\right\}$$
אם הצפיפות בכל נקודה נתונה שווה לריבוע המרחק.
2. מסה של העקום
$$\Gamma=\left\{(x,y,z)=\left(e^t\cos t,e^t\sin t,e^t\right):t\in[0,1]\right\}$$
אם הצפיפות היא קבועה ושווה ל $\sqrt{3}$.
3. המסה של הברבולה
$$\Gamma=\left\{(x,y):y^2=4x,x\in[0,1]\right\}$$
אם הצפיפות בנקודה (x,y) שווה ל $|y|$.
4. אורך העקום
$$\Gamma=\left\{(x,y,z):x=\sqrt{t}\cos t,\sqrt{t}\sin t,z=t:0\leq t\leq 1\right\}.$$

4 תבניות מדוייקות ושדות משרמים.

כדאי לעבור על תרגול 3 לפני שניגשים...

תרגיל 11. עבור כל אחת מהתבניות הבאות קבע אם היא מדוייקת בתחום הנתון. במידה וכן, מצא את פונקציית הפוטנציאל של השדה המתאים.

1. $\omega\left(x,y\right)=e^{x-y}\left(1+x+y\right)\mathbf{d}x+e^{x-y}\left(1-x-y\right)\mathbf{d}y$ **בכל** $\mathbb{R}^2$.
2. $\omega\left(x,y\right)=\frac{y^2}{1+x^2+y^2}\mathbf{d}x+\frac{y}{1+x^2+y^2}\mathbf{d}y$ **בכל** $\mathbb{R}^2$.
3. $\omega\left(x,y\right)=-\frac{y^2}{(x-y)^2}\mathbf{d}x+\frac{x^2}{(x-y)^2}\mathbf{d}y$ **ב** $\left\{(x,y):x>y\right\}$.
4. $\omega\left(x,y\right)=\frac{2y}{(x+y)}\mathbf{d}x-\frac{2x}{(x+y)}\mathbf{d}y$ **ב** $\left\{(x,y):x+y>0\right\}$.

תרגיל 12. האם התבנית

$$\omega\left(x,y\right)=\frac{(x-y)}{x^2+y^2}\mathbf{d}x+\frac{(x+y)}{x^2+y^2}\mathbf{d}y$$

מדוייקת על $\mathbb{R}^2\setminus\left\{(0,0)\right\}$? במידה וכן, מצא את פונקציית פוטנציאל של השדה המתאים.

5 אינטגרל קווי מסוג שני.

לפני שניגשים לפתרון של התרגיל יש לוודא שהמושגים "שקילות של עקומות" ו"אוריינטציה" מובנים לכם. תרגיל 13 אופציונלי. מותר להשתמש במסכנות שלו.

תרגיל 13. הוכיחו את הטענות הבאות.

1. תהייה α ו βעקומות פשוטות, שקולות וחלקות, ω תבנית דיפרנציאבילית לינארית כך ש $\int_\alpha \omega$ קיים. הוכיחו ש
$$.\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$
2. תהיינה α ו β עקומות פשוטות, שקולות וחלקות למקוטעין, ω תבנית דיפרנציאלית לינארית כך ש $\int_\alpha \omega$ קיים. הוכיחו ש
$$.\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$
3. תהי Γ מסילה, γ_1 ו γ_2 פרמטריזציות פשוטות וחלקות למקוטעין של Γ כך ש $(\Gamma, \gamma_1) = (\Gamma, \gamma_2)$, ω תבנית דיפרנציאלית כך ש $\int_{\gamma_1} \omega$ קיים. הוכיחו ש
$$.\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$
במילים אחרות, עבור עקומה מכוונת חלקה למקוטעין, האוריינטציה קובעת את הערך שך האינטגרל.
4. תהי $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ עקומה חלקה ופשוטה, ω תבנית דיפרנצאילית כך ש $\int_\alpha \omega$ קיים. נגדיר $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ על ידי
$$.\beta(t) = \alpha(1-t)$$
הוכיחו שמתקיים
$$.\int_\beta \omega = -\int_\alpha \omega$$
5. הוכיחו שאם $\int_{\gamma_1} \omega$ קיים, ו $(\Gamma, \gamma_1) = -(\Gamma, \gamma_2)$ אזי
$$.\int_{\gamma_1} \omega = -\int_{\gamma_2} \omega$$

תרגיל 14. חשבו את האינטגרלים הבאים.

1. $\int_\Gamma F \cdot \mathbf{d}\gamma$ כאשר Γ היא התמונה של המסילה
$$.\gamma(t) = \left(\cos t + \sqrt{3}\sin t, 2\cos t + 1, \sqrt{3}\sin t - \cos t\right) : t \in [0, 2\pi]$$
2. $\int_\Gamma \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{d}y$ כאשר Γ היא השפה של הריבוע $ABCD$
$$A = (1,0), B = (0,1), C = (-1,0), D = (0,-1)$$
נגד כיוון השעון.
3. $\int_\Gamma -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{d}y$ כאשר $\Gamma = \left\{(x,y) : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1\right\}$ נגד כיוון השעון.

4. $\int_\Gamma y^3z^2\mathbf{d}x+\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathbf{d}y+z\mathbf{d}z$ **כאשר** $\Gamma=\left\{(x,y,z):y^2+z^2=4,x=0,z<0\right\}$
5. $\int_\Gamma x^2\mathbf{d}x+y^2\mathbf{d}y=1$ **כאשר** $\Gamma=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$ **נגד כיוון השעון.**

תרגיל 15. **הוכיחו שאם** $M \le \|F(x)\|$ **שגה חסומה,** Γ **פשוטה, אזי לכל פרמטריזציה** γ **של** Γ **מתקיים:**

$$\left|\int_\Gamma F\cdot\mathbf{d}\gamma\right|\le ML(\Gamma).$$

בהצלחה ☺.

מקורות

[1] **בן-ציון קון, חשבון דיפרנציאלי ואינגרלי 2, חלק ב'.**

[2] $Edwards,\ Advanced\,Calculus\,of\ several\,variables$, **פרק 5.**