תרגיל 1

1. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי (X,d) מתקיים:
א. $d(x_1,x_n)\le d(x_1,x_2)+...+d(x_{n-1},x_n)$ לכל $n\ge 2$.
ב. $|d(x,z)-d(y,z)|\ge d(x,y)$.

2. נסמן בX את אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2...,n\}$, ונגדיר את הפו' הבאה $d:X\times X\to[0,\infty)$ ע"י:

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \dfrac{1}{\min\{i:x_i\neq y_i\}} & x\neq y\end{cases}.$$

הוכיחו כי d היא אולטרה מטריקה על X.

3. תהי $d:X\times X\to\mathbb{R}$ פו' שמקיימת:
א. $d(x,y)=0\iff x=y$
ב. $d(y,x)\le d(z,y)+d(z,x)$ לכל $x,y,z\in X$.
הוכיחו שd היא מטריקה על X.

4. הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות הן מטריקות:
א. $d((x,y),(x',y'))=\min\{d(x,x'),d(y,y')\}$ על $\mathbb{R}^2$.
ב. $d((x,y),(x',y'))=|x|+|y|+|x'|+|y'|$ על $\mathbb{R}^2$.
ג. $d((x,y),(x',y'))=d(x,x')+d(y,y')$ על $X\times X$ כאשר (X,d) הוא מרחב מטרי.

5. תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה הp ־ אדית באופן הבא: עבור $p\in\mathbb{N}$ ראשוני, מגדירים $k(x,y)=\max\{i:p^i|(x-y)\}$. ו $d_p(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$.
א. הוכיחו: $p^n\to 0$ במטריקה הp־ אדית.
ב. תארו את הכדור $B_{d_7}(3,\frac{1}{49})$ במרחב $(\mathbb{Z},d_7)$.
ג. עבור $z\in\mathbb{Z}$ תנו דוגמא לסדרה לא קבועה ששואפת לz במרחב $(\mathbb{Z},d_3)$.

6. יהי (X,d) מרחב מטרי, $x_1,x_2\in X$ ו $r_1,r_2>0$, ונניח ש $p\in B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)$. נסמן $r=\min\{r_1-d(x_1,p),r_2d(x_2,p)\}$. הוכיחו ש $B(p,r)\subseteq$

$.B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)$

7. תהי $\{x_n\}$ סדרה במרח מטרי (X,d). נאמר ש $\{x_n\}$ קבועה לבסוף, אם יש $x\in X$ ו $n_0\in\mathbb{N}$, כך ש $x_n=x\ \forall n\geq n_0$.
א. הוכיחו שבמרחב מטרי כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.
ב. הוכיחו שבמרחב מטרי דיסקרטי כל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף.

8. במרחב l_∞ הראו שהסדרה $x_n=(\frac{n+1}{n},\frac{n+2}{2n},\frac{n+3}{3n},...)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.

9. נתבונן במרחב (X,d) כאשר X היא קבוצת המספרים האי רציונליים, וd היא המטריקה המושרית מ$\mathbb{R}$.
א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: אם (M,τ) הוא מרחב מטרי ו (Y,τ_Y) תת מרחב עם המטריקה המושרית, אז לכל $\{x_n\}\subseteq Y$, ו $x\in Y$, $x_n\to x$ לפי τ, אמ"ם $x_n\to x$ לפי τ_Y.
ב. נסתכל על הסדרה $x_n=\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}$. הוכיחו ש $X\subseteq\{x_n\}$.
ג. הוכיחו ש $\{x_n\}$ לא מתכנסת ב X.

ב. נניח בשלילה שקיים n כך ש $\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$. כלומר, קיימים $a,b\in\mathbb{Z}$ כך ש $\frac{a}{b}=\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}$. אז $bn+b\sqrt{2}=bn-an \Longleftarrow (b+a)\sqrt{2}=bn-an \Longleftarrow \sqrt{2}=\frac{bn-an}{b+a}$ $a(n-\sqrt{2})=b(n+\sqrt{2})\Longleftarrow an-a\sqrt{2}$. כלומר, $\sqrt{2}$ רציונלי, וזאת כמובן סתירה.
ג. נניח ש $x_n\to x$ ב X. אז $x_n\to x$ גם ב $\mathbb{R}$. אבל ידוע ש $x_n\to 1$ ב$\mathbb{R}$. ו$x\neq 1$, כי $1\neq X$. בסתירה ליחידות הגבול במרחב מטרי.

שאלת אתגר: הראו שאם $(X,||\cdot||)$ מרחב נורמי, וd המטריקה המושרית מהנורמה, אז לא קיימים כדורים שונים $B(a_1,r_1),B(a_2r_2)$ כך ש $r_1<r_2$ וגם $B(a_2,r_2)\subseteq B(a_1,r_1)$.