

תרגיל 1

1. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי (X, d) מתקיים:
 א. $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$ לכל $n \geq 2$.
 ב. $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.
2. נסמן ב- X את אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$, ונגדיר את הפונקציה הבאה $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ע"י:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{\min\{i : x_i \neq y_i\}} & x \neq y \end{cases}$$

הוכיחו כי d היא אולטרה מטריקה על X .

3. תהי $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שמקיימת:
 א. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
 ב. $d(y, x) \leq d(z, y) + d(z, x)$ לכל $x, y, z \in X$.
 הוכיחו ש- d היא מטריקה על X .
4. הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות הן מטריקות:
 א. $d((x, y), (x', y')) = \min\{d(x, x'), d(y, y')\}$ על \mathbb{R}^2 .
 ב. $d((x, y), (x', y')) = |x| + |y| + |x'| + |y'|$ על \mathbb{R}^2 .
 ג. $d((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$ על $X \times X$ כאשר (X, d) הוא מרחב מטרי.

5. תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה ה- p אדית באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני,

$$d_p(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{p^{k(x, y)}} & x \neq y \end{cases} \text{ ו } k(x, y) = \max\{i : p^i | (x - y)\}$$

- א. הוכיחו: $p^n \rightarrow 0$ במטריקה ה- p אדית.
 ב. תארו את הכדור $B_{d_7}(3, \frac{1}{49})$ במרחב (\mathbb{Z}, d_7) .
 ג. עבור $z \in \mathbb{Z}$ תנו דוגמה לסדרה לא קבועה ששואפת ל- z במרחב (\mathbb{Z}, d_3) .

6. יהי (X, d) מרחב מטרי, $x_1, x_2 \in X$ ו- $r_1, r_2 > 0$ ונניח ש- $p \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$. הוכיחו ש- $B(p, r) \subseteq B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ כאשר $r = \min\{r_1 - d(x_1, p), r_2 - d(x_2, p)\}$.

$$.B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$$

7. תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי (X, d) . נאמר ש $\{x_n\}$ קבועה לבסוף, אם יש $x \in X$ ו $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $x_n = x \forall n \geq n_0$.
 א. הוכיחו שבמרחב מטרי כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.
 ב. הוכיחו שבמרחב מטרי דיסקרטי כל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף.

8. במרחב l_∞ הראו שהסדרה $x_n = (\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{2n}, \frac{n+3}{3n}, \dots)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.

9. נתבונן במרחב (X, d) כאשר X היא קבוצת המספרים האי רציונליים, ו d היא המטריקה המושרית מ \mathbb{R} .

א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: אם (M, τ) הוא מרחב מטרי ו (Y, τ_Y) תת מרחב עם המטריקה המושרית, אז לכל $\{x_n\} \subseteq Y$ ו $x \in Y$, $x_n \rightarrow x$ לפי τ , אמ"ם $x_n \rightarrow x$ לפי τ_Y .

ב. נסתכל על הסדרה $x_n = \frac{n + \sqrt{2}}{n - \sqrt{2}}$. הוכיחו ש $\{x_n\} \subseteq X$.

ג. הוכיחו ש $\{x_n\}$ לא מתכנסת ב X .

ב. נניח בשלילה שקיים n כך ש $\frac{n + \sqrt{2}}{n - \sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. כלומר, קיימים $a, b \in \mathbb{Z}$ כך ש

$$\sqrt{2} = \frac{bn - an}{b + a} \iff (b + a)\sqrt{2} = bn - an \iff bn + b\sqrt{2} = a \iff \frac{n + \sqrt{2}}{n - \sqrt{2}} = \frac{a}{b}$$

כלומר, $an - a\sqrt{2} \iff b(n + \sqrt{2}) = a(n - \sqrt{2})$.

ג. נניח ש $x_n \rightarrow x$ ב X . אז $x_n \rightarrow x$ גם ב \mathbb{R} . אבל ידוע ש $x_n \rightarrow 1$ ב \mathbb{R} . ו $x \neq 1$, כי $X \neq \mathbb{R}$. בסתירה ליחידות הגבול במרחב מטרי.

שאלת אתגר: הראו שאם $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי, ו d המטריקה המושרית מהנורמה, אז לא קיימים כדורים שונים $B(a_1, r_1), B(a_2, r_2)$ כך ש $r_1 < r_2$ וגם $B(a_2, r_2) \subseteq B(a_1, r_1)$.