תרגיל 1

1. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי (X,d) מתקיים:
א. $d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2)+...+d(x_{n-1},x_n)$ לכל $n \geq 2$.
ב. $|d(x,z)-d(y,z)| \leq d(x,y)$.

2. נסמן בX את אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2...,n\}$, ונגדיר את הפו' הבאה $d: X \times X \to [0,\infty)$ ע"י:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ \dfrac{1}{\min\{i : x_i \neq y_i\}} & x \neq y \end{cases}.$$

הוכיחו כי d היא אולטרה מטריקה על X.

3. תהי $d: X \times X \to \mathbb{R}$ פו' שמקיימת:
א. $d(x,y)=0 \iff x=y$
ב. $d(y,x) \leq d(z,y)+d(z,x)$ לכל $x,y,z \in X$.
הוכיחו שd היא מטריקה על X.

4. הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות הן מטריקות:
א. $d((x,y),(x',y')) = \min\{d(x,x'),d(y,y')\}$ על $\mathbb{R}^2$.
ב. $d((x,y),(x',y')) = |x|+|y|+|x'|+|y'|$ על $\mathbb{R}^2$.
ג. $d((x,y),(x',y')) = d(x,x')+d(y,y')$ על $X \times X$ כאשר (X,d) הוא מרחב מטרי.

5. תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה הp ־ אדית באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני, מגדירים $k(x,y) = \max\{i : p^i | (x-y)\}$. ו $d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases}$.
א. הוכיחו: $p^n \to 0$ במטריקה הp־ אדית.
ב. תארו את הכדור $B_{d_7}(3,\frac{1}{49})$ במרחב $(\mathbb{Z},d_7)$.
ג. עבור $z \in \mathbb{Z}$ תנו דוגמא לסדרה לא קבועה ששואפת לz במרחב $(\mathbb{Z},d_3)$.

6. יהי (X,d) מרחב מטרי, $x_1,x_2 \in X$ ו $r_1,r_2 > 0$, ונניח ש $p \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$. נסמן $r = \min\{r_1-d(x_1,p), r_2-d(x_2,p)\}$. הוכיחו ש $B(p,r) \subseteq$

$B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)$.

7. תהי $\{x_n\}$ סדרה במרח מטרי (X,d). נאמר ש $\{x_n\}$ קבועה לבסוף, אם יש $x\in X$ ו $n_0\in\mathbb{N}$, כך ש $x_n=x\ \forall n\geq n_0$.
א. הוכיחו שבמרחב מטרי כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.
ב. הוכיחו שבמרחב מטרי דיסקרטי כל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף.

8. במרחב l_∞ הראו שהסדרה $x_n=(\frac{n+1}{n},\frac{n+2}{2n},\frac{n+3}{3n},...)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.

9. נתבונן במרחב (X,d) כאשר X היא קבוצת המספרים האי רציונליים, וd היא המטריקה המושרית מ$\mathbb{R}$.
א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: אם (M,τ) הוא מרחב מטרי ו (Y,τ_Y) תת מרחב עם המטריקה המושרית, אז לכל $\{x_n\}\subseteq Y$, ו $x\in Y$, $x_n\to x$ לפי τ, אמ"ם $x_n\to x$ לפי τ_Y .
ב. נסתכל על הסדרה $x_n=\dfrac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}$. הוכיחו ש $\{x_n\}\subseteq X$.
ג. הוכיחו ש $\{x_n\}$ לא מתכנסת ב X.
א. אם $x_n,x\in Y$, אז $\tau(x_n,x)=\tau_Y(x_n,x)$, מהגדרת המטריקה המושרית. לכן $\tau(x_n,x)\to 0\iff\tau_Y(x_n,x)\to 0$.
ב. נניח בשלילה שקיים n כך ש $\dfrac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$. כלומר, קיימים $a,b\in\mathbb{Z}$ כך ש $\dfrac{a}{b}=\dfrac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}$. אז $b(n+\sqrt{2})=a(n-\sqrt{2})\Longleftarrow bn+b\sqrt{2}=an-a\sqrt{2}\Longleftarrow (b+a)\sqrt{2}=bn-an\Longleftarrow \sqrt{2}=\dfrac{bn-an}{b+a}$. כלומר, $\sqrt{2}$ רציונלי, וזאת כמובן סתירה.
ג. נניח ש $x_n\to x$ ב X. אז $x_n\to x$ גם ב $\mathbb{R}$. אבל ידוע ש $x_n\to 1$ ב$\mathbb{R}$. ו$x\neq 1$, כי $1\notin X$. בסתירה ליחידות הגבול במרחב מטרי.

שאלת אתגר: הראו שאם $(X,||\cdot||)$ מרחב נורמי, וd המטריקה המושרית מהנורמה, אז לא קיימים כדורים שונים $B(a_1,r_1),B(a_2r_2)$ כך ש $r_1<r_2$ וגם $B(a_2,r_2)\subseteq B(a_1,r_1)$.