

# חשבון אינפיניטסימלי 1 | מבחן תשע"ה מועד ב'

הצעת פתרון | יונתן סמידוברסקי

## שאלה 1

יהיו  $f(x), g(x)$  פונקציות גזירות בנקודה  $a$ .

הוכח שהפונקציה  $f(x) \cdot g(x)$  גזירה בנקודה  $a$ , ונגזרתה בנקודה זו היא  $f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)$ .

בעצם נתון כי

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

קיימים

כעת נחשב לפי ההגדרה את הנגזרת של  $f(x) \cdot g(x)$  בנקודה  $a$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ g(a+h) \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right] = [\lim_{h \rightarrow 0} g(a+h)] \cdot f'(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

$$= f'(a) \cdot g(a) + g'(a) f(a)$$

בפרט הן גזירות ולכן גם היא גזירה.

## שאלה 2

תהי  $a_n$  סידרה כך שלכל תת-סידרה שלה יש תת-סידרה המתכנסת ל  $a$ . (בפירוט: לכל תת-סידרה  $b_n$  של  $a_n$  יש תת-סידרה  $c_n$  של  $b_n$  המקיימת  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ ).

הוכח:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

תהי  $a_n$  סדרה המקיימת שלכל ת"ס שלה יש ת"ס המתכנסת ל  $a$ .  
ראינו בהרצאה, לכל סדרה קיימים גבול עליון ותחתון במובן הרחב.  
נסתכל על שתי תתי הסדרות שגבולן הוא הגבול העליון התחתון.

$$a_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} a_n, a_{n_j} \rightarrow \underline{\lim} a_n$$

כעת מהנתון לשתי הסדרות האלה יש ת"ס מתכנסת ל  $a$ ,  $a_{n_{k_m}} \rightarrow a, a_{n_{j_r}} \rightarrow a$

אבל מהתכנסותן לגבול חלקי

וממשפט האומר כי כל הגבולות החלקיים של סדרה מתכנסת שווים, נובע כי

$$a = \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a$$

כלומר, הגבול העליון והתחתון שווים ל  $a$  ושוב ממשפט,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

### שאלה 3

לכל אחד מהטורים הבאים, קבעו האם הוא מתכנס.

א.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln(n)}$

ב.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$

ג. מצא את הערכים של  $a$  שעבורם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln(n)}$  מתכנס.

תשובה:

### סעיף א

ננסה התכנסות בהחלט

$$a_n = \left| \frac{(-1)^n}{n - \ln(n)} \right| = \frac{1}{n - \ln(n)}$$

אבל  $\frac{1}{n - \ln(n)} \geq \frac{1}{n}$ , ומבחן ההשוואה עם הטור ההרמוני קיבלנו שאינה מתכנסת בהחלט, נעבור למתכנסת בתנאי.

ננסה לייבניץ  $a_n := \frac{1}{n - \ln(n)}$ , כלומר צריך להוכיח  $a_n \rightarrow 0$  ויורדת

ראשית  $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n - \ln(n)} \leq \frac{1}{n}$  ( $n \geq \ln(n)$ ), ולכן מסנדרויץ'  $a_n \rightarrow 0$ .

את היותה של  $a_n$  מונוטונית יורדת, נראה באמצעות נגזרת שלילית בתחום המתאים. נגדיר  $f(x) := \frac{1}{x - \ln(x)}$

$$f'(x) = \frac{-(x - \ln(x))'}{(x - \ln(x))^2} = \frac{-1 + \frac{1}{x}}{(x - \ln(x))^2}$$

ברור כי המכנה תמיד חיובי, והמונה שלילי החל מ-1, במקרה שלנו יורדת בוודאות החל מ-2  $n \geq 2$

ולכן אפשר להפעיל לייבניץ החל בשלב זה, סיימנו וקיבלנו מתכנסת בתנאי.

### סעיף ב

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

היא בהחלט חיובית, ולכן מתכנסת בהחלט או מתבדרת. נראה כי יורדת על מנת להפעיל עיבוי

שוב, נסתכל על הפונקציה

$$f(x) := \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln(x)}{x^4} = \frac{x(1 - 2\ln(x))}{x^4}$$

המכנה תמיד חיובי, והמונה החל משלב מסויים שלילי, לכן מספיק להסתכל על זנב הטור ואפשר להשתמש בעיבוי. בעצם הטור מתכנס ומתבדר יחד עם

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\ln(2^n)}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \ln(2)}{2^n} = \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

כעת, נפעיל מבחן המנה על הטור שקיבלנו  $b_n := \frac{n}{2^n}$ , נקבל

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{(n+1)}{2n} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

ולכן הטור מתכנס, ביחד עם הטור שלנו- **מתכנס בהחלט**

## סעיף ג

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln(n)}$$

ראשית תנאי הכרחי הוא  $a^{\ln(n)} \rightarrow 0$  וזה קורה אם ורק אם  $-1 < a < 1$ . הגדרנו חזקה ממשית רק לחיוביים, ובעצם נבחן רק את התחום  $0 < a < 1$  (עבור  $a = 0$  ברור שמתכנס לאפס) אם  $0 < a < 1$ , אפשר להפעיל עיבוי (קל להראות מונוטוניות יורדת ומתכנסת לאפס) ואז מתכנס ומתבדר ביחד עם

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a^{\ln(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a^{n \cdot \ln(2)} = a^{\ln(2)} \sum_{n=1}^{\infty} (2a)^n$$

זהו הטור ההנדסי כי  $0 < 2a < 1$  ולכן סיימנו.

מתכנס עבור  $0 \leq a < 1$

#### שאלה 4

א. מצא את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right)$ .

ב. מצא את הגבול העליון והגבול התחתון של הסידרה  $a_n := \left( 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)^{n^{((-1)^n)}}$ .

#### סעיף א

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \sin(x)}$$

המכנה והמונה שואפים לאפס, לכן נפעיל לופיטל

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x \sin(x) + x^2 \cos(x)}$$

שוב המכנה והמונה שואפים לאפס, שוב נפעיל לופיטל

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2 \sin(x) + 2x \cos(x) + 2x \cos(x) - x^2 \sin(x)}$$

שוב נפעיל לופיטל

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2 \cos(x) + 2 \cos(x) - 2x \sin(x) + 2 \cos(x) - 2x \sin(x) - 2x \sin(x) - x^2 \cos(x)} = \frac{1}{2 + 2 + 2} = \frac{1}{6}$$

#### סעיף ב

טענת עזר

אם מצאנו שתי תתי סדרות  $a_{n_k}, a_{n_j}$  המכסות את הסדרות ויש להן גבול חלקי  $a, a_{n_j} \rightarrow b$  - אלה הגבולות החלקיים היחידים. בפרט, הן קובעות את הגבול העליון והתחתון.

הוכחה

נניח בשלילה שקיימת ת"ס  $a_{n_m} \rightarrow c$  כך  $a \neq c, b \neq c$ .  
כעת נחלק למקרים

**מקרה א':** יש כמות סופית של איברים מתת הסדרה  $a_{n_k}$  ואינסוף איברים מהסדרה  $a_{n_j}$ .  
מסתכלים על זנב הסדרה ולכן כולה מתכנסת ל**b**.

**מקרה ב':** יש כמות סופית של איברים מתת הסדרה  $a_{n_j}$  ואינסוף איברים מהסדרה  $a_{n_k}$ .  
מסתכלים על זנב הסדרה ולכן מתכנסת ל**a**.

**מקרה ג':** יש אינסוף איברים משתי תתי הסדרות

ואז אם  $a = b$  מקבלים שהיא גם מתכנסת אליהן, שתי תתי סדרות המכסות את הסדרה ומתכנסות לאותו הגבול. אחרת  $a \neq b$  ואז אינה מתכנסת כי בעלת שני גבולות חלקיים שונים, בפרט אין גבול חלקי נוסף. חזרה לשאלה  
 במקרה שלנו, נסתכל על האינדקסים הזוגיים והאי זוגיים

$$a_n := \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^{(n(-1)^n)}$$

**הזוגיים**

$$a_{2n} = \left(1 + \frac{-1}{2n}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{-2 \cdot n}\right)^{2n} \rightarrow e^{-1}$$

**האי זוגיים**

$$a_{2n-1} = \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{(2n-1)} \rightarrow 1$$

ולכן הגבול העליון הוא 1 והתחתון הוא  $e^{-1}$ .

## שאלה 5

א. יהיו  $f(x), g(x)$  פונקציות המוגדרות בסביבת נקודה  $a$ , כך ש  $g(x)$  אינה רציפה ב  $a$  אך  $f(x)$  וכן  $f(x) \cdot g(x)$  שתיהן רציפות ב  $a$ .

מהו הערך  $f(a)$ ?

ב. תהי  $f(x)$  פונקציה המוגדרת בקטע  $[0, 1]$  ומקיימת  $f(0) = 0$ . נתון שהנגזרת הימנית  $f'_+(0)$  קיימת.

מצא את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)}$ .

## סעיף א

נניח בשלילה  $f(a) \neq 0$ , כעת, ממשפט מההרצאה, מנת רציפות רציפה ומתקיים

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x)}{f(x)} = \frac{f(a) \cdot g(a)}{f(a)} = g(a)$$

בסתירה לכך שאינה רציפה

## סעיף ב

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{f(x) \cdot \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln(x) \cdot \frac{f(x)}{x}} = e^0 = 1$$

המעבר האחרון נובע מהטענה הבאה

נראה כי  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) \cdot \frac{f(x)}{x} = 0$ , נראה ששתי הפונקציות הבאות מתכנסות, הראשונה לאפס וזה יוכיח

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

ומצד שני

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0^+)$$

כעת המכפלה שלהן חוקית כמכפלת מתכנסת ומתכנסת למכפלתן, אפס, וסיימו.