אלגברה לינארית 2 | לכסון, שילוש וצורת ז'ורדן

מאת יונתן סמידוברסקי

תזכורת

<u>הגדרות</u>

- בעבור מטריצות ריבועיות, תהי $A \in \mathbb{F}^{n \cdot n}$
$\lambda \in \mathbb{F}$ ייקרא **ערך עצמי** של A אם קיים $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש $Av = \lambda v$
$0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ ייקרא **וקטור עצמי** אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש $Av = \lambda v$
נסמן את אוסף הערכים העצמיים של A כך: $\sigma(A)$
- בעבור אופרטורים לינאריים, תהי $T : V \to V$
$\lambda \in \mathbb{F}$ ייקרא **ערך עצמי** של T אם קיים $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש $Tv = \lambda v$
$0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ ייקרא **וקטור עצמי** אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש $Tv = \lambda v$
נסמן את אוסף הערכים העצמיים של T כך: $\sigma(T)$

<u>כללים לחישוב ערכים ווקטורים עצמיים:</u>

- יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי, ו-B בסיס לV
נסמן $A = [T]_B$, אזי $\lambda \in \sigma(T) \iff \lambda \in \sigma(A)$
- נסמן פולינום אופייני $p_A(x) = det(xI - A)$, שורשיו הם הערכים העצמיים של A
- **המרחב העצמי** של הערך העצמי λ הוא $V_\lambda := N(A - \lambda I)$ והוא מהווה את מרחב הוקטורים העצמיים המתאימים לערך העצמי λ.
- **ריבוי אלגברי** k_λ הוא החזקה של $(x - \lambda)$ בפולינום האופייני
- **ריבוי גיאומטרי** m_λ הוא המימד של המרחב העצמי המתאים $dim(N(A - \lambda I))$
- **פולינום מינימלי** הפולינום המתוקן מדרגה מינימלית שמאפס את A (כל גורם אי פריק של הפולינום האופייני מופיע בו)
- T תיקרא **נורמלית** אם $TT^* = T^*T$
- A ייקרא **נורמלי** אם $AA^* = A^*A$
- בסיס הוא **אורתונורמלי** אם כל שני איברים בו מאונכים, ואורכם (הנורמה) היא 1 (לפי המכפלה הפנימית)
- מטריצה היא **אוניטרית** אם $AA^* = A^*A = I$

לכסון

לכסון מטריצות ריבועיות ואופרטורים לינאריים

<u>הגדרה-</u>

A תיקרא ניתנת ללכסון אם קיימת D אלכסונית דומה לה, כלומר קיימת P הפיכה כך ש$P^{-1}AP = D$

$T : V \to V$ תקרא ניתנת ללכסון אם קיים B בסיס לV שעבורו $[T]_B = D$ אלכסונית ($[T]_B = [I]_C^B[T]_C[I]_B^C$)

<u>קריטריונים ללכסון</u>

- $A \in \mathbb{F}^{n \cdot n}$ לכסינה $\iff$ קיים ל$\mathbb{F}^n$ בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של A
- $T : V \to V$ לכסינה $\iff$ קיים לV בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של A
- נניח ש$p_{A/T}(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, אזי A/T ניתנת ללכסון $\iff$ לכל $\lambda \in \sigma(A/T)$ מתקיים שהריבוי האלגברי והגיאומטרי שווים.
- A/T ניתנת ללכסון $\iff$ הפולינום המינימלי מתפרק לגורמים לינאריים שונים
- אם למטריצה או העתקה יש n ערכים עצמיים שונים- היא ניתנת ללכסון
- אופרטור הוא לכסין $\iff$ ניתן לפרק את V לסכום ישר של תתי המרחבים העצמיים $V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_m}$

אלגוריתם ללכסון

<u>האלגוריתם למציאת P המלכסנת וD האלכסונית</u>

* אם מדובר באופרטור, ניקח בסיס (עדיף הסטנדרטי) ונסמן $A = [T]_E$

1) מוצאים ערכים עצמיים של המטריצה A (הפולינום האופייני)

2) מוצאים בסיסים למרחבים העצמיים $B_{V_{\lambda_1}}, ..., B_{V_{\lambda_m}}$

(שימו לב שבשלב זה אם יצאו ריבויים גיאומטריים שונים מהאלגבריים היא לא ניתנת ללכסון)

3)

* אם מדובר במטריצה, מגדירים את עמודות P להיות הוקטורים העצמיים

* אם מדובר באופרטור, מאחדים את הבסיסים $B := B_{V_{\lambda_1}} \cup ... \cup B_{V_{\lambda_m}}$

וזהו הבסיס או המטריצה המלכסנת

4) בעמודה הi של D יופיע הערך העצמי המתאים לוקטור העצמי בעמודה i הוא בבסיס הסדור B

דוגמה

נלכסן את האופרטור $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, Tv = Av$ כאשר $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \\ 11 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

1)

לצורך נוחות, ניקח בסיס סטנדרטי $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ואז $[T]_E = A$

$$p_A(x) = det \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -7 & x-3 & -2 \\ -11 & -2 & x-3 \end{pmatrix} = (x+1) \cdot det \begin{pmatrix} x-3 & -2 \\ -2 & x-3 \end{pmatrix} = (x+1)(x-1)(x-5)$$

2)

$$V_{-1} = N(A+I) = N\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \\ 11 & 2 & 4 \end{pmatrix} = span\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\}$$

$$V_{1} = N(A-I) = N\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 2 \\ 11 & 2 & 2 \end{pmatrix} = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

$$V_{5} = N(A-5I) = N\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & -2 \end{pmatrix} = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

3) $B = \{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ (נשים לב שבהגדרה $[T]_B = [I]_E^B[T]_E[I]_B^E$, בעצם $P = [I]_B^E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$)

4) $D = [T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

מוטיבציה ללכסון

מוטיבציה ללכסון

העלאת מטריצה בחזקה גבוהה היא פעולה יחסית קשה ומסורבלת ודורשת המון חישובים,

נשים לב שאם קיבלנו כי A לכסינה, כלומר קיימות D אלכסונית וP הפיכה כך ש $P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & . & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & . & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & . & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}$

אזי בעצם $A=PDP^{-1}$

ואם נעלה את שני הצדדים בחזקת n, נקבל

$$A^n=(PDP^{-1})\cdot\ldots\cdot(PDP^{-1})=PD^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & . & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & . & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & . & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

דוגמה- סדרת פיבונאצ'י

סדרת פיבונאצ'י מוגדרת כך $a_n:=\begin{cases}1 & n=1\\ 1 & n=2\\ a_{n-1}+a_{n-2} & else\end{cases}$, כלומר: $1,1,2,3,5,8,13,21\ldots$

ניעזר בלכסון מטריצות כדי למצוא את האיבר במקום הa_n במפורש

נשים לב

$$\begin{pmatrix}a_{n+2}\\ a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}+a_n\\ a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}a_2\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

נחשב את $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n$,

מלכסון מתקבל

$$\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt5} & \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt5}{2} & \frac{1+\sqrt5}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt5}{2} & 0\\ 0 & \frac{1+\sqrt5}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt5}{2} & \frac{1+\sqrt5}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\frac{-1+\sqrt5}{2})^n & 0\\ 0 & (\frac{1+\sqrt5}{2})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt5} & \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}\end{pmatrix}$$

מציבים ומקבלים בעצם

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכסון אוניטרי/אורתוגנלי

<u>הגדרה</u>

- יהי $T : V \to V$ אופרטור על ממ"פ, נאמר שT ניתן ללכסון אוניטרי
אם קיים בסיס אורתונורמלי B עבור V כך ש$[T]_B$ אלכסונית

- תהי $A \in \mathbb{F}^{n \cdot n}$ מטריצה ריבועית, נאמר A ניתנת ללכסון אוניטרי
אם קיימת P אוניטרית כך ש$P^{-1}AP$ אלכסונית

<u>הערות</u>

* אורתוגנלית היא אוניטרית מעל R
* מטריצה היא אוניטרית אם ורק אם עמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי, זה מסביר את הקשר
בין מטריצות ואופרטורים לינאריים בעזרת המטריצה המייצגת.

<u>משפט הלכסון האוניטרי</u>

- יהי T אופרטור לינארי על ממ"פ אז
T לכסין אוניטרית $\iff$ $p_T(x)$ מל"ל וT נורמלית
- תהי A מטריצה ריבועית על ממ"פ אז
A לכסינה אוניטרית $\iff$ $p_A(x)$ מל"ל וA נורמלית

<u>האלגוריתם</u>

1) מלכסנים רגיל

2) מפעילים גראם שמידט על הבסיס או על עמודות P לקבלת בסיס אורתונורמלי או מטריצה אוניטרית

הקשר בין אופרטורים ומטריצות לכסינות אוניטרית

לכל אופרטור לינארי, אפשר לקחת מטריצה מייצגת שלו, ללכסן.

מקבלים P מלכסנת, עושים גראם שמידט על עמודותיה ואז עמודותיה מהווים את הבסיס.

דוגמה

נישאר עם הדוגמה ממקודם, D תישאר זהה לחלוטין!

הבסיס שלנו הוא $B = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

מתחילים עם גראם שמידט

$$w_1 = b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = b_2 - \frac{< b_2, w_1 >}{||w_1||^2} = \begin{pmatrix} -4/15 \\ 17/15 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = b_3 - \frac{< b_3, w_1 >}{||w_1||^2} w_1 - \frac{< b_3, w_2 >}{||w_2||^2} w_2 = \begin{pmatrix} 6/11 \\ 2/11 \\ 2/11 \end{pmatrix}$$

מנרמלים לקבלת $w_1' = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}, w_2' = \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{330}}{165} \\ \frac{17\sqrt{330}}{330} \\ \frac{-\sqrt{330}}{66} \end{pmatrix}, w_3' = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{\sqrt{11}}{11} \\ \frac{\sqrt{11}}{11} \end{pmatrix}$

(כעת, אם היינו עובדים עם מטריצות אז $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ w_1' & w_2' & w_3' \\ | & | & | \end{pmatrix}$ היא אוניטרית)

שילוש

שילוש מטריצות ריבועיות ואופרטורים לינאריים

<u>הגדרה-</u>

A תיקרא ניתנת לשילוש אם קיימת D משולשית דומה לה, כלומר קיימת P הפיכה כך ש$P^{-1}AP=D$

$T:V\to V$ תקרא ניתנת לשילוש אם קיים B בסיס לV שעבורו $[T]_B=D$ משולשית ($[T]_B=[I]_C^B[T]_C[I]_B^C$)

<u>קריטריון לשילוש</u>

- $A\in\mathbb{F}^{n\cdot n}$ ניתנת לשילוש $\iff$ $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים
- $T:V\to V$ ניתנת לשילוש $\iff$ $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים

<u>מסקנה חשובה-</u> מעל $\mathbb{C}$ כל מטריצה ניתנת לשילוש

אלגוריתם ללכסון

<u>האלגוריתם למציאת P המלכסנת וD האלכסונית</u>

* אם מדובר באופרטור, ניקח בסיס (עדיף הסטנדרטי) ונסמן $A=[T]_E$, נעבוד איתו ובסוף נעשה התאמות.

1) מוצאים ערכים עצמיים של המטריצה A (הפולינום האופייני, אם לא מל"ל- לא ניתנת לשילוש)

2) מוצאים בסיסים למרחבים העצמיים $B_{V_{\lambda_1}},...,B_{V_{\lambda_m}}$

3) כעת לוקחים בסיס $B=\{v_1,...v_k\}$ המורכב מו"ע ומשלימים לבסיס $B=\{v_1,...,v_k,u_{k+1},...,u_n\}$

* נכתוב את P כך שעמודותיה יהיו וקטורי הבסיס

4) כעת מתקיים כי $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & * & * & * & ...\\ 0 & . & * & * & * & ...\\ 0 & 0 & . & * & * & ...\\ 0 & 0 & 0 & . & * & ...\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k & ...\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C\end{pmatrix}$

כך שC הינה מטריצה, ואם נשלש אותה (רקורסיבית) נקבל סך הכל מטריצה משולשית,

ניקח את Q המשלשת את C ואז $Q'=I_k\oplus Q=\begin{pmatrix}I_k & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}$

5) נקבל ש

$$(Q'^{-1}P^{-1})A(PQ')$$

הינה משולשית, ואם מדובר באופרטור לוקחים את עמודות PQ להיות הבסיס.

דוגמה (מתוך תרגול עם אריאל ויצמן)

1) נסתכל על המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}-1&-3&-4&-5\\1&1&-1&-3\\2&5&9&12\\-1&-2&-3&-3\end{pmatrix}$$

$$p_A(x)=(x-1)^2(x-2)^2$$

(2

$$V_1=N\begin{pmatrix}-2&-3&-4&-5\\1&0&-1&-3\\2&5&8&12\\-1&-2&-3&-4\end{pmatrix}=...=span\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\}$$

$$V_2=N\begin{pmatrix}-3&-3&-4&-5\\1&-1&-1&-3\\2&5&7&12\\-1&-2&-3&-5\end{pmatrix}=...=span\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\}$$

3) משלימים לבסיס $B=\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix},e_3,e_4\}$

4) נסמן

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-2&0&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

מחשבים את ההופכית ומקבלים

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0.5&1.5\\2&0&-4.5&-6.5\\0&0&-0.5&-2.5\\0&0&1.5&3.5\end{pmatrix}$$

נסמן $C=\begin{pmatrix} -0.5 & -2.5 \\ 1.5 & 3.5 \end{pmatrix}$

(1.1

$$p_C(x)=(x-2)(x-1)$$

(2.1

$$V_1=N\begin{pmatrix} -1.5 & 2.5 \\ -1.5 & -2.5 \end{pmatrix}=span\{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

$$V_2=N\begin{pmatrix} 2.5 & 2.5 \\ -1.5 & -2.5 \end{pmatrix}=span\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

(3.1

קיבלנו לכסינה ובפרט משולשית, מסמנים $Q=\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

נחזור ל4

(4 ניקח $Q'=I_k\oplus Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

כעת

$$(Q^{-1}P^{-1})A(PQ)$$

הינה משולשית!

המטריצה המשלשת הינה $PQ=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, והמטריצה המשולשת היא $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

שילוש אוניטרי/אורתוגנלי

<u>הגדרה</u>

- יהי $T:V\to V$ אופרטור על ממ"פ, נאמר שT ניתן לשילוש אוניטרי אם קיים בסיס אורתונורמלי B עבור V כך ש$[T]_B$ משולשית
- תהי $A\in\mathbb{F}^{n\cdot n}$ מטריצה ריבועית, נאמר A ניתנת לשילוש אוניטרי אם קיימת P אוניטרית כך ש$P^{-1}AP$ משולשית

משפט השילוש האוניטרי

- יהי T אופרטור לינארי על ממ"פ אז

T ניתן לשילוש אוניטרי $\iff$ $p_T(x)$ מל"ל

- תהי A מטריצה ריבועית על ממ"פ אז

A ניתן לשילוש אוניטרי $\iff$ $p_A(x)$ מל"ל

האלגוריתם

1) משלשים רגיל

2) מפעילים גראם שמידט על הבסיס או על עמודות P לקבלת בסיס אורתונורמלי או מטריצה אוניטרית

דוגמה

נישאר עם הדוגמה ממקודם,
$$PQ=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-2&0&0&0\\1&-2&-5&1\\0&1&3&-1\end{pmatrix}$$

נפעיל גראם שמידט על
$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-5\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

ונקבל
$$B'=\left\{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{-\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{210}}{3}\\\frac{-\sqrt{210}}{105}\\\frac{-11\sqrt{210}}{210}\\\frac{\sqrt{210}}{35}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-4\sqrt{1365}}{195}\\\frac{-17\sqrt{1365}}{1365}\\\frac{-2\sqrt{1365}}{455}\\\frac{16\sqrt{1365}}{1365}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{39}}{6}\\\frac{-2\sqrt{39}}{39}\\\frac{-\sqrt{39}}{13}\\\frac{-5\sqrt{39}}{39}\end{pmatrix}\right\}$$

מציבים במטריצה חדשה את העמודות, היא אוניטרית וסיימנו.

ז'רדון

ז'רדון מטריצות ריבועיות

הגדרה בלוק ז'ורדן הוא בלוק מהצורה
$$J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0&0\\0&.&.&0&0\\0&0&.&.&0\\0&0&0&.&1\\0&0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

משפט ז'ורדן תהי $A\in\mathbb{F}^{n\cdot n}$ מטריצה ריבועית כך שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים, אזי A דומה למטריצה אלכסונית בלוקים שכל בלוקיה הם בלוקי ז'ורדן

$$A\sim\begin{pmatrix}J_{m_1}(\lambda_1)&.&.&.&0\\.&.&&&.\\.&&.&&.\\.&&&.&.\\0&.&.&.&J_{m_k}(\lambda_k)\end{pmatrix}=J_{m_1}(\lambda_1)\oplus...\oplus J_{m_k}(\lambda_k)$$

<u>משפט ז'ורדן הנילפוטנטי</u> כאשר המטריצה נילפוטנטית (כלומר קיים k בעבורו $A^k = 0$)
מתקיים

$$A \sim \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & . & . & . & 0 \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & . & J_{m_k}(0) \end{pmatrix}$$

הכללים לצורת ז'ורדן

עבור λ ערך עצמי כלשהו

<u>הריבוי האלגברי</u> הוא סכום סדרי הבלוקים המתאימים לλ

<u>הריבוי הגיאומטרי</u> הוא מספר הבלוקים המתאימים לערך העצמי λ

<u>החזקה של $(x-\lambda)$ בפולינום המינימלי</u> היא גודל הבלוק המקסימלי המתאים לλ

דוגמה

למשל, תהי A המקיימת:

ע"ע/תכונה	ריבוי אלגברי	ריבוי גיאומטרי	חזקה בפולינום המינימלי
0	4	3	2
1	3	2	2
2	1	1	1

מסתכלים על הערך העצמי 0, ישנם 3 בלוקים שסכום סדרם הוא 4 והמקסימלי מביניהם בגודל 2. אזי חייב להתקיים שהשניים האחרים מגודל 1

$$J(A) = J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus ...$$

מסתכלים על הערך העצמי 1, ישנם 2 בלוקים שסכום סדרם הוא 3 והגדול מביניהם בגודל 2, לכן

$$J(A) = J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_2(1) \oplus J_1(1)$$

והערך העצמי 2, הוא בלוק אחד ויחיד מגודל 1

$$J(A) == J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_2(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(2)$$