פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 4: משוואות המילטון וחוקי שימור

1. הלגרנז'יאן של גוף בעל מסה m עם פוטנציאל $U(r) = -GMm/r$ נתון ע"י $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$

   (א) מצאו את ההמילטוניאן של הבעיה.
   האם הוא זהה לאנרגיה של המערכת ? מדוע ?

   (ב) רשמו את משוואות התנועה של המילטון

   (ג) רשמו את הלגרנג'יאן בקואורדינטות קרטזיות והראו כי הוא סימטרי תחת טרנספורמצית סיבוב $x \to x + \epsilon y,\ \ y \to y - \epsilon x$.

   (ד) מצאו שמורה של טרנספורמצית הסיבוב. מהי שמורה זו ?

2. ההמילטוניאן של בעית שני הגופים נתון ע"י $\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$

   (א) רשמו את משוואות התנועה

   (ב) פתרו אותן בהנחת תנאי ההתחלה $r(0) = r_0, \dot{r}(0) = 0$ כאשר $r_0 = \frac{L^2}{km}$ ו $L = p_\theta$ התנע הזויתי

3. נגדיר את סוגרי פואסון של שתי פונקציות
   $f(q_1, ..., q_n; p_1..., p_n; t),\ \ g(q_1, .., .q_n; p_1..., p_n; t)$ להיות
   $\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$.

   (א) הוכיחו כי $\frac{df}{dt} = \{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$, כאשר $\mathcal{H}$ ההמילטוניאן של המערכת

   (ב) רשמו את ההמילטוניאן משאלה 1 בקואורדינטות קרטזיות והראו כי השמורה שמצאתם ב 1ד מקיימת $\{f, \mathcal{H}\} = 0$

   (ג) הכלילו את תוצאת 3ב לפוטנציאל כלשהוא מהצורה
   $U(x, y) = U(x^2 + y^2)$

4. מערכת מתוארת ע"י הלגרנג'יאן $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \dot{x}t$.

   (א) רשמו את פונקצית יעקובי של המערכת $h = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$

   (ב) הראו כי $\frac{\partial h}{\partial t} \neq \frac{dh}{dt}$

   (ג) רשמו את ההמילטוניאן $\mathcal{H}$ של המערכת

   (ד) הראו כי $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt}$. מדוע, אם כן, $\frac{\partial h}{\partial t} \neq \frac{dh}{dt}$ למרות ששתי הפונקציות $h, \mathcal{H}$ מקבלות את אותם ערכים ?

5. הוכיחו את התכונות הבאות של סוגרי פואסון

(א) אנטיסימטריות $\{f,g\}=-\{g,f\}$ ולכן $\{f,f\}=0$

(ב) $\{f,const\}=0$

(ג) ליניאריות $\{f,\alpha g+\beta h\}=\alpha\{f,g\}+\beta\{f,h\}$

(ד) זהות יעקובי $\{f,\{g,h\}\}+\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\}=0$

(ה) $\{f,gh\}=f\{g,h\}+\{g,f\}h$

6. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י $\mathcal{H}=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$. נציג כעת את המשתנים $a=\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x+i\frac{p}{m\omega}\right),\ a^*=\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x-i\frac{p}{m\omega}\right)$.

(א) בטאו את $\mathcal{H}$ באמצעות a,a^*.

(ב) חשבו את סוגרי פואסון $\{a,a^*\},\ \{a,\mathcal{H}\},\ \{a^*,\mathcal{H}\}$.

(ג) רשמו את משוואות התנועה עבור a,a^* ופתרו אותן.

(ד) בטאו את x,p באמצעות הפתרונות שקיבלתם.