תרגול מס' 2 - חשבון אינפי

הערה. כאשר נדבר על נורמה על $\mathbb{R}^n$, בלי לציין במפורש באיזו נורמה מדובר, הכוונה היא לנורמה הסטנדרטית המושרית מהמכפלה הפנימית הסטנדרטית $\mathbb{R}^n$, דהיינו, נורמת-2.

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} \ .$$

מרחבים מטריים

בשיעור הקודם דיברנו על נורמה ועל הקשר שלה למונח "מרחק" שאותו אנחנו צריכים על מנת לעשות חשבון אינפינטסימלי. מסתבר, שעל מנת להכליל מושג של מרחק לקבוצה כלשהי, לא ממש צריכים את תכונות הקשורות לכפל בסקלר, שכן רוב הקבוצות הן לא מרחבים וקטוריים, וניתן להסתפק באקסיומות הבאות.

הגדרה 1. תהי X קבוצה. פונקציה $d : X \times X \to \mathbb{R}$ נקראת מטריקה אם היא מקיימת את התכונות הבאות.

1. אי-שליליות: לכל $x, y \in X$ מתקיים $0 \leq d\left(x,y\right)$ ו $d\left(x,y\right) = 0$ אם ורק אם $x = y$. (מרחק תמיד אי-שלילי ומרחק בין שתי נקודות הוא חיובי).
2. סימטריות: לכל $x, y \in X$ מתקיים: $d\left(x,y\right) = d\left(y,x\right)$. (המרחק מ x ל y שווה למרחק מ y ל x).
3. אי-שוויון המשולש: לכל $x, y, z \in X$ מתקיים $d\left(x,z\right) \leq d\left(x,y\right) + d\left(y,z\right)$. (אם עוברים בנקודת ביניים אז המרחק גדל).

הזוג $\left(X, d\right)$ נקרא מרחב מטרי.

תרגיל 2. הוכיחו את אי-שוויון המשולש "המעבצן"

$$\left|d\left(x,z\right) - d\left(y,z\right)\right| \leq d\left(x,y\right)$$

עבור מרחבים מטריים.

פתרון 3. בה"כ, נניח ש $d\left(y,z\right) \leq d\left(x,z\right)$. אזי, ניתן להוריד את $|\cdot|$ מהצד השמאלי. נקבל:

$$.d\left(x,z\right) - d\left(y,z\right) \leq d\left(x,\text{ט}\right)$$

נעביר את $d\left(y,z\right)$ אגף ונקבל את שוויון השמולש הרגיל, וסיימנו.

נביא מספר דוגמאות:

דוגמה 4. יהי (X,d) מרחב מטרי. יהי $Y\subseteq X$. אזי $\tilde{d}=d|_{Y\times Y}$ היא מטריקה על Y. במילים אחרות, כל ת"מ של X הוא מרחב מטרי בפני עצמו יחד עם המטריקה של X המצומצמת על Y. במקרה הזה, אומרים ש $\left(Y,\tilde{d}\right)$ הוא תת-מרחב של (X,d).

דוגמה 5. עם V הוא מרחב נורמי, הנורמה $\|\cdot\|$ על V משרה מטריקה על V באופן הבא:

$$d\left(x,y\right)=\|x-z\|.$$

דוגמה 6. $\mathbb{R}^{+}$ יחד עם הפונקציה $d\left(x,y\right)=\left|\ln\frac{x}{y}\right|$ הוא מרחב מטרי. נבדוק שהאקסיומות מתקיימות.

1. האי שליליות נובעת מערך מוחלט בהגדרה ו $\left|\ln\frac{x}{y}\right|=0$ גורר ש $x=y$.
2. סימטריות גם בקלות:

$$d\left(x,y\right)=\left|\ln\frac{x}{y}\right|=\left|-\ln\frac{y}{x}\right|=\left|\ln\frac{y}{x}\right|=d\left(y,x\right).$$

3. אי-שוויון המשולש

$$\begin{aligned}d\left(x,z\right)=\left|\ln\frac{x}{z}\right|&=\left|\ln\frac{x}{y}\frac{y}{z}\right|\leq\left|\ln\frac{x}{y}+\ln\frac{y}{z}\right|\\&\leq\left|\ln\frac{x}{y}+\ln\frac{y}{z}\right|\leq\left|\ln\frac{x}{y}\right|b+\left|\ln\frac{y}{z}\right|\\&=d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)\end{aligned}$$

נתבונן שוב בדוגמה הזאת. נשים לב, שאת $d\left(x,y\right)$ ניתן להגדיר באופן הבא:

$$d\left(x,y\right)=\left|\ln x-\ln y\right|.$$

נזכר, שלמעשה $\left(\mathbb{R},|\cdot|\right)$ הוא מרחב מטרי בפני עצמו ו $\ln:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$ היא פונקציה הפיכה. באופן טריוויאלי, מקבלים את ההכללה הבאה: אם (X,d) הוא מרחב מטרי ו $f:Y\to X$ היא פונקציה הפיכה, אזי תמיד ניתן להגדיר על Y מטריקה $\tilde{d}$ על ידי

$$\tilde{d}\left(x,y\right)=d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right).$$

נראה, כיצד ניתן לבדוק מטריקות חדשות ממטריקות קיימות.

דוגמה 7. תהיינה $d_1,\dots,d_n$ מטריקות שונות על X. אזי, לכל $0<\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ הפונקציה

$$d\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i d\left(x,y\right)$$

היא מטריקה על X. קל לוודא שכל האקסיומות מתקיימות:

1. אי-שליליות מתקבלת מהעובדה שיש לנו צירוף חיובי של ביטויים אי-שליליים, ויכול להתקבל 0 אם ורק אם לכל $1\le i\le n$, $d_i\left(x,y\right)=0$ דהיינו, $x=y$.
2. סימטריות נובעת מהסימטריות של כל גורם בסכום, כלומר:

$$d\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i d_i\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i d_i\left(y,x\right)=d\left(y,x\right).$$

3. באותו אופן מקבלים את אי-שוויון המשולש:

$$\begin{aligned}d\left(x,z\right)&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i d_i\left(x,z\right)\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(d_i\left(x,y\right)+d_i\left(y,z\right)\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i d_i\left(x,y\right)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i d_i\left(y,z\right)=d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)\end{aligned}$$

דוגמה 8. אם $\left(X_1,d_1\right),\dots,\left(X_n,d_n\right)$ הם מרחבים מטריים, אזי על $X=X_1\times\cdots\times X_n$ יחד עם המטריקה

$$d\left(\left(x_1,\dots,x_n\right),\left(y_1,\dots y_n\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}d_i\left(x_i,y_i\right)$$

הוא מרחב מטרי. בדיקת האקסיומות מתבצעת כמו בדוגמה הקודמת, עם שינוי קטן במקררה הראשון:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}d_i\left(x_i,y_i\right)=0\implies d_i\left(x_i,y_i\right)=0\implies x_i=y_i\\\implies\left(x_1,\dots,x_n\right)=\left(y_1,\dots,y_n\right)\end{aligned}$$

דוגמה 9. אם $\left(X,d\right)$ הוא מרחב מטרי, אזי הפונקציה

$$\tilde{d}\left(x,y\right)=\frac{d\left(x,y\right)}{1+d\left(x,y\right)}$$

היא מטריקה על X. שוב, יש לבדוק שהאקסיומות מתקיימות. בדיקת אי-שליליות וסימטריות היא טריוויאלית, ולכן נדלג עליה. נראה את אי-שוויון המשולש:

$$\tilde{d}(x,y)+\tilde{d}(y,z)-\tilde{d}(x,z)=$$
$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}-\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}=$$
$$\frac{d(x,y)(1+d(y,z))(1+d(x,z))+d(y,z)(1+d(x,y))(1+d(x,z))}{(1+d(x,y))(1+d(y,z))(1+d(x,z))}-$$
$$\frac{d(x,z)(1+d(x,y))(1+d(y,z))}{(1+d(x,y))(1+d(y,z))(1+d(x,z))}$$

נשים לב, שהמכנה תמיד חיובי, על כן מספיק להוכיח שהמונה של הביטוי הוא אי שלילי. נפתח ונקבל:

$$d(x,y)+d(x,y)d(y,z)+d(x,y)d(x,z)+d(x,y)d(y,z)d(x,z)+$$
$$d(y,z)+d(x,y)d(y,z)+d(x,z)d(y,z)+d(x,y)d(x,z)d(y,z)-$$
$$d(x,z)-d(x,y)d(x,z)-d(x,z)d(y,z)-d(x,y)d(y,z)d(x,z)=$$
$$d(x,y)+d(y,z)-d(x,z)+2d(x,y)d(y,z)+d(x,y)d(x,z)d(y,z)\geq 0.$$

כל הדוגמאות בהמשך הקורס למרחב מטרי יהיו תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^n$. אמנם, חשוב לדעת שיש מטריקות שאינן קשורות לנורמה. נביא דוגמה אחת.

דוגמה 10. המטריקה הדיסקרטית מודגרת על הקבוצה X באופן הבא:

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}.$$

כל האקסיומות של מטריקה מתקיימות שוב: אי-שליליות וסימטריות פשוט נובעות מהגדרה, ואי-שוויון המשולש נובע מבדיקה של כמה מקרים.

קבוצות פתוחות וסגורות במרחבים מטריים

המטרה שלנו, היא להכליל מושג של קטע פתוח וקטע סגור למרחבים מטריים (לזכור שמדברים בעיקר על $\mathbb{R}^n$). המושגים הם קבוצות פתוחות וסגורות. מסתבר, שהרבה יותר נוח לנסח מושגים ולהוכיח מפשטים בעזרת המוחים הללו, בלי להזכיר ϵ ו δ באופן מפורש (למרות שלא תמיד נוכל לברוח מזה...). בנוסף, חשוב לזכור, שלאורך כל הקורס נתעסק ב $\mathbb{R}^n$ובתתי-קבוצות שלו (תתי-מרחבים המטריים שלו). יחד עם זאת, יותר נח לשכוח מזה לתקופה קצרה ולנסח את המושגים בצורה כללית יותר. רוב ההוכחות עוברות אחת לאחת, על ידי החלפת $\|\cdot\|$ במטריקה כללית.

הגדרה 11. יהי (X,d) מרחב נורמי, $a\in X$ ו $0<r$.

1. הקבוצה $B(a,r)=\{x\in X, d(x,a)<r\}$ נקראת כדור פתוח ברדיוס r.

2. הקבוצה $\overline{B}(a,r)=\{x\in X, d(x,a)\leq r\}$ נקראת כדור סגור ברדיוס r.

נראה כמה דוגמאות.

דוגמה 12. נראה איך נראה כדור היחידה $\mathbb{R}$. על פי ההדרה

$$B(x,r)=\left\{y\middle| |x-y|<r\right\}=$$
$$\left\{y\middle|x-r<y<x+r\right\}=$$
$$(x-r,x+r),$$

כלמר קטע פתוח. מצד שני, כל קטע פתוח (a,b) ב $\mathbb{R}$ הוא למעשה הכדור הפתוח $B\left(\frac{a+b}{2},\frac{b-a}{2}\right)$. בדיוק באותו האופן מראים שכדורים סגורים ב $\mathbb{R}$ הם הקטעים הסגורים.

הערה. כדור ברדיוס 1 סביב 0 במרחב נורמי V נקרא לעיתים כדור היחידה.

דוגמה 13. נראה איך נראים $B(0,1)$ ו $\overline{B}(0,1)$ ב $\mathbb{R}^2$ ביחס לנורמות שונות.

1. ביחס ל $\|\cdot\|_2$, כדור היחידה הפתוח $B(0,1)$ הוא $\left\{(x,y)\,|x^2+y^2<1\right\}$ שהוא עיגול ברדיוס 1 סביב ה0 ללא השפה. כדור היחידה הסגור $\overline{B(0,1)}$ הוא אותו העיגול עם השפה.
2. ביחס ל $\|\cdot\|_1$, כדור $B(0,1)=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|+|y|<1\right\}$. ברביע הראשון, מדובר למעשה בכל הנקודות שנמצאות מתחת לישר $x+y=1$, שהיא משולש. אם נשקף אותו בכל דרך אפשרית (או שפשוט נפתור כל משוואה בנפרד עבור כל אחד מהרביעים), נקבל שכדור היחידה הוא למעשה החלק הפנימי של הריבוע שקודקודיו הם $(0,-1),(-1,0),(1,0),(0,1)$. $\overline{B}(0,1)$ הוא אותו הריבוע, כולל השפה.
3. ביחס ל $\|\cdot\|_\infty$, $B(0,1)=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|,|y|<1\right\}$. מסתבר, שזה ריבוע שקדודודיו הם $(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$ בלי השפה. $\overline{B}(0,1)$ הוא אותו הריבוע עם השפה.

דוגמה 14. עבור $\left(\mathbb{R}^n,\frac{\|\|}{1+\|\|}\right)$ כדור היחידה הוא כל $\mathbb{R}^n$. (הערה - זה נכון עבור כל מרחב).

הגדרה 15. יהי (X,d) מרחב נורמי.

1. עבור $A\subseteq X$, נאמר ש a היא נקודה פנימית של A, אם קיים $0<r$ כך ש $B(a,r)\subseteq A$.
2. $A\subseteq X$ נקראת קבוצה פתוחה ב X, אם לכל $a\in A$, a היא נקודה פנימית של a.
3. אם $A\subseteq X$ פתוחה ב A, אזי $A^c=X\setminus A$ נקראת קבוצה סגורה.

דוגמה 16. בכל מרחב מטרי (X,d), X ו $\emptyset$ הן קבוצות פתוחות ב X.

דוגמה 17. יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $B(x,r)$. אזי $B(x,r)$ היא פתוחה ב X. אזי כדור פתוח היא קבוצה פתוחה.

הוכחה. יהי $y\in B(x,r)$. נסמן $q=r-d(x,y)$. נראה $B(y,q)\subseteq B(x,r)$. יהי $z\in B(y,q)$. אזי

$$d(x,z)\leq$$
$$d(x,y)+d(y,z)<$$
$$d(x,y)+r-d(x,y)=r.$$

$\square$

דוגמה 18. יהי (X,d) מרחב מטרי. כדור סגור $\overline{B}\left(x,r\right)$ הוא קבוצה סגורה. נראה ש $X\setminus B\left(x,r\right)$ היא קבוצה פתוחה. שוב, נראה שלכל $y\notin B\left(x,r\right)$ קיים q כך ש $B\left(y,q\right)\subseteq X\setminus B\left(x,r\right)$. נסמן $q=d\left(x,y\right)-r$. יהי $z\in B\left(y,r\right)$. אזי, לפי אי-שוויון המשולש המעצבן, מתקיים

$$\begin{aligned} d\left(x,z\right) &\geq \\ \left|d\left(x,y\right)-d\left(z,y\right)\right| \geq \left|d\left(x,y\right)-q\right| &= \\ .\left|d\left(x,y\right)-\left(d\left(x,y\right)-r\right)\right| &= r \end{aligned}$$

כלמר, $z\notin B\left(x,r\right)$. לכן $B\left(y,q\right)\subseteq X\setminus B\left(x,r\right)$.

תרגיל 19. יהיו $B\left(x_1,r_1\right),\ldots,B\left(x_n,r_n\right)$ כדורים פתוחים במרחב מטרי (X,d). הוכיחו, שאם $\bigcap_{i=1}^{n}B\left(x_i,r_i\right)\neq\emptyset$. אזי לכל $x\in\bigcap_{i=1}^{n}B\left(x_i,r_i\right)$ קיים $0<r$ כך ש

$$.B\left(x,r\right)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}B\left(x_i,r_i\right)$$

.

פתרון. יהי $x\in\bigcap_{i=1}^{n}B\left(x_i,r_i\right)$. נסמן, $r=\min\left\{r_i-d\left(x_i,x\right)\right\}$. נראה ש

$$.B\left(x,r\right)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}B\left(x_i,r_i\right)$$

יהי $y\in B\left(x,r\right)$. אזי לכל i מתקיים

$$\begin{aligned} d\left(x_i,y\right) &\leq \\ d\left(x_i,x\right)+d\left(x,y\right) &> \\ d\left(x_i,x\right)+r &\leq \\ .d\left(x_i,x\right)+r_i-d\left(x_i,x\right) &= r_i \end{aligned}$$

ו $y\in B\left(x_i,r_i\right)$ על פי ההגדרה.

דוגמה 20. $\mathbb{R}^3\setminus\{(1,2,3)\}$ היא קבוצה פתוחה. יהי $(x,y,z)\neq(1,2,3)$. נסמן

$$.r=\|(x,y,z)-(1,2,3)\|$$

מהגדרת $B\left((x,y,z),r\right)$, $(1,2,3)\notin B\left(x,y,z\right)$ כי $r\geq\|(x,y,z)-(1,2,3)\|$ ולכן $B\left((x,y,z),r\right)\subseteq\mathbb{R}^3\setminus\{(1,2,3)\}$.

הערה. את הדוגמה הקודמת למרחב מטרי כללי (X,d) עם אותה הוחכה בדיוק עד כדי החלפת סימון.

דוגמה 21. יהי (X,d), אזי לכל $x\in X$, $\{x\}$ היא קבוצה סגורה. זה נובע מהגדרת קבוצה סגורה ומדוגמה הקדומות וההערה אחריה.

תרגיל 22. האם $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ היא קבוצה פתוחה או קבוצה סגורה ב $\mathbb{R}$?

פתרון. נראה שאף אחת מהאפשרויות אינה מתקיימת. תחילה, יהי $q \in \mathbb{Q}$. אזי לכל $0 < r$ קיים x אי-רציונלי כך ש $q < x < q + r$ ולכן $B(q,r) \not\subseteq \mathbb{R}$.

דרך קצת יותר מתוחכמת: אם כל x שמקיים $q - r < x < q + r$ הוא רציונלי, אזי משיקולי סגירות $y = x - q$ הוא רציונלי. כלמר, לכל $-r < y < r$, y הוא רציונלי, שזה כמובן אבסורד, כיוון שקבוצת הרציונליים אינה חסומה מלרע. כלמר, אף נקודה ב $\mathbb{Q}$ אינה נקודה פנימית. באותו אופן (על ידי השימוש בטענה שבין כל שני מספרים קיים מספר רציונלי), מראים ש $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ אינה פתוחה. ולכן, $\mathbb{Q}$ אינה פתוחה ואינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

משפט 23. יהי (X,d) מרחב מטרי.

1. יהי $\{X_i\}_{i \in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות פתוחות. אזי, מתקיים $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ היא קבוצה פתוחה.
2. יהי $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ אוסף סופי של קבוצות פתוחות. אזי $X = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$ הוא קבוצה פתוחה.
3. יהי $\{X_i\}_{i \in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות סגורות. אזי $X = \bigcap_{i \in I} X_i$ היא קבוצה סגורה.
4. יהי $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ אוסף סופי של קבוצות סגורות. אזי $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ היא קבוצה סגורה.

האיפיון הבא של קבוצות פתוחות הוא טריוויאלי להוכחה (ומן הסתם כבר הוכח בכיתה...), אבל לעיתים יותר נוח לעבוד איתו.

משפט 24. יהי (X,d) מרחב מטרי. אזי $A \subseteq X$ היא קבוצה פתוחה, אם ורק אם קיים אוסף של כדורים פתוחים $\{B(x_i,r_i)\}_{i \in I}$ כך ש

$$X = \bigcup_{i \in I} B(x_i,r_i).$$

מטריקות ונורמות שקולות

הגדרה 25. יהי (X,d) מרחב מטרי, ויהי $x \in X$. קבוצה פתוחה N שמקיימת $x \in N$ נקראת סביבה פתוחה של x (לעיתים, ובפרט אצלנו, פשוט סביבה).

לפני שנמשיך ננסה לשכנע שלמושגים שכתבנו יש שימושים כלשהם (לפחות אינפי). נזכיר את המושג הראשון שבד"כ לומדים באינפי 1.

הגדרה 26. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב $\mathbb{R}$ ו $a \in \mathbb{R}$. נאמר, ש a_n מתכנסת ל a ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ אם לכל $0 < \epsilon$ קיים m כך שאם $m < n$ אזי $|a_n - a| < \epsilon$.

ההגדרה הזאת מוכללת בקלות למרחב מטרי כללי. נרשום אותה.

הגדרה 27. יהי (X,d) מרחב מטרי. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת ב X ו $x \in X$. נאמר x_n מתכנסת ל x אם לכל $0 < \epsilon$ קיים m כך שאם $m < n$ אזי $d(a_n,a) < \epsilon$.

תרגיל 28. יהי (X,d) מרחב מטרי, $x \in X$ וסדרה $\{x_n\}$ ב X. אזי $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ אם ורק אם לכל סביבה פתוחה N של קיים m כך שלכל $m < n$, $x_n \in N$.

פתרון. ($\Longleftarrow$) . נניח ש $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. תהי N סביבה פתוחה של x. מכיוון ש N פתוחה, קיים כדור פתוח $B(x,r)$ כך ש $B(x,r) \subseteq N$. מצד שני, קיים m כך שלכל $m < n$, $d(x_n - x) < r$.אבל זה בדיוק אומר, ש $x_n \in B(x,r)$ ובפרט $x_n \in N$.
($\Longrightarrow$). נניח שלכל סביבה N קיים m כך שלכל $m < n$, $x_n \in N$. בפרט, מכיוון שכל כדור פתוח סביב x הוא סביבה פתוחה של x. יהי $0 < \epsilon$. אזי קיים m כך שלכל $m < n$ מתקיים $x_n \in B(x,\epsilon)$, או באופן שקול, $|x_n - x| < \epsilon$, כנדרש.

נדון בסדרות ובהתכנסות שלהן ביתר פירוט בהמשך הקורס.

לאחר שהשתכנענו שיש חשיבות למושג קבוצה פתוחה, ואפשר (לפחות בחלק מהגדרות) להתשמש בו במקום ϵ ו δ, ננסה לענות לשאלה הבאה.

שאלה 29. נניח ש X מרחב מטרי ו d_1 ו d_2 הן מטריקות על X. האם d_1 ו d_2 מגדירירות את אותו אוסף של קבוצות פתוחות?

תשובה: מטריקות d_1 ו d_2 נקראות שקולות, אם ורק אם לכל קבוצה $U \subseteq X$, U פתוחה ביחס ל d_1 אם ורק אם U פתוחה ביחס ל d_2.

בהמשך נתעסק בעיקר ב $\mathbb{R}^n$. הטענה הבאה שנוכיח, לעיתים שימושי מאד.

טענה 30. יהיו $\|\cdot\|_a$ ו $\|\cdot\|_b$ נורמות על $\mathbb{R}^n$. אזי הן משרות מטריקות שקולות, אם ורק אם קיימים קבועים חיוביים α ו β כך שלכל $v \in V$ מתקיים

$$\alpha \|v\|_a \le \|v\|_b \le \beta \|v\|_b.$$

הערה. נורמות שמקיימות את האי-שוויון הנ"ל נקראות נורמות שקולות. קל לבדוק ששקילות נורמות היא יחס שקילות.

הוכחה. תחילה, נשים לב שאת האי-שוויון האחרון ניתן לנסח באופן הבא: קיימים α ו β כך ש

$$\|v\|_a \le \alpha \|v\|_b\ .$$

וגם

$$\|v\|_b \le \|v\|_a\ .$$

בנוסף נסמן כדור ברדיוס r סביב x על ידי $B_a(x,r)$ עבור $\|\cdot\|_a$ ועל ידי $B_b(x,r)$ עבור $\|\cdot\|_b$ בהתאמה. נעבור להוכחה.

($\Longleftarrow$) אם הנורמות שקולות, אזי עבור כדור היחידה $B_a(0,1)$ הוא קבוצה פתוחה ביחס ל $\|\cdot\|_b$ ולכן קיים r כך ש $B_b(0,r) \subseteq B_a(0,1)$. בפרט, לכל $\frac{1}{\alpha} < r$, אם $\|v\|_b = \frac{1}{\alpha}$ אזי $v \in B_a(0,1)$ או, באופן שקול,

$$\|v\|_a = 1\ .$$

נכפיל ב α ונקבל עבור v שמקיים $\|v\|_b = 1$

$$\begin{aligned}\|v\|_a &= \left\|\alpha \frac{v}{\alpha}\right\|_a \\ &= \alpha \left\|\frac{v}{\alpha}\right\|_a \\ &< \alpha.\end{aligned}$$

עכשיו, לכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$\begin{aligned}\|v\|_a &= \\ \left\|\|v\|_b \frac{v}{\|v\|_b}\right\|_a &= \\ \|v\|_b \left\|\frac{v}{\|v\|_b}\right\|_a &\le \alpha \|v\|_b\end{aligned}$$

באותו האופן מראים את האי-שוויון השני.

($\Longrightarrow$) עכשיו, נראה שאי-שוויון הנ"ל גורר את שקילות הנומרות המושרות. נניח שהנורמות שקולות. יהי $B_a(x,r)$ כדור פתוח ביחס ל $\|\cdot\|_a$. נראה $B_a(x,r)$ פתוח ביחס ל $\|\cdot\|_b$. יהי $y \in B_a(x,r)$. כמו שראינו קודם, קיים q כך ש $B_a(y,q) \subseteq B_a(x,r)$. על פי ההנחה, קיים c כך ש $\|v\|_a \le c\|v\|_b$. נבחר $s = \frac{1}{c}q$. אזי לכל $z \in B_b(y,s)$ מתקיים

$$\|y-z\|_a \le c\|y-z\|_b < c \cdot s = c\frac{q}{c} = q\ .$$

$\square$

הערה 31. בטענה שהוכחנו, ניתן להחליף כל $\mathbb{R}^n$ בכל מרחב נורמי, למעשה.

דוגמה 32. הנורמות $1,2,\infty$ הן נורמות שקולות. נזכיר, שהראינו שמתקיים:

$$\frac{\|x\|_1}{\sqrt{n}} \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 .$$

כמו כן, ראינו שמתקיים:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le n\|x\|\ .$$

דוגמה 33. משפט הבא יוכח בהמשך הקורס.

משפט 34. יהיו $\|\cdot\|_a$ ו $\|\cdot\|_b$ על $\mathbb{R}^n$. אזי הן שקולות.

המשפט והדוגמה הקודמים נותנים לנו גמישות נוספת בחישובים.

תרגיל 35. הראו שהקבוצה $S = \left\{(x,y) \,\middle|\, x^2 - y > 0\right\}$ היא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^2$ ביחס לנורמת 2 (כפי שאמרנו קודם, זה לא באמת חשוב, כי כל הנורמות ב $\mathbb{R}^n$ הן שקולות).

פתרון. יהי $(x,y) \in S$. אזי קיים a כך שאם $y-a < t < y+a$ אזי $t < x^2 - \left(\frac{1}{2}\left(x^2-y\right)\right)$ ו b כך שאם $x-b < s < x+b$, אזי $s^2 > x^2 - \left(\frac{1}{2}\left(x^2-y\right)\right)$. ז"א לכל

$$(s,t) \in [x-b, x+b] \times [y-a, y+a]$$

מתקיים $s^2 - t > 0$. ניקח $r = \min\{a,b\}$ ונקבל שלכל $(s,t) \in B_{\|\cdot\|_\infty}((x,y), r)$ מתקיים $s^2 - t > 0$, ולכן $(s,t) \in S$. כלומר, סביב כל נקודה ב S קיים כדור פתוח ביחס לנורמת $\|\cdot\|_\infty$.

הערה 36. בהמשך הקורס, כאשר נדבר על רציפות ועל סדרות, נראה כלים חזקים יותר על מנת להוכיח שקבוצה מסויימת היא פתוחה או סגורה.

נקודות הצטברות ונקודות מבודדות

הגדרה 37. יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $A\subseteq X$. נאמר ש $p\in X$ היא נקודת הצטברות של A אם לכל $0<r$ קיים $a\in A$ כך ש $0<d(a,p)<r$.

משפט 38. יהי (X,d) מרחב מטרי ו $A\subseteq X$. אזי, p היא נקודת הצטברות של A אם ורק אם כל סביבה N של p מתקיים

$$|N\cap A|=\infty .$$

(כל סביבה של p מכילה אינסוף נקודת של A).

דוגמה 39. 1 היא נקודת הצטברות של $(0,1)$, מכיוון שכל $0<\epsilon$ קיים $1-\epsilon<x<1$ ומקתיים

$$|1-x|=1-x>1-(1-\epsilon)=\epsilon .$$

תרגיל 40. הראו, שאוסף כל נקודות ההצטברות של $\mathbb{Z}$ הוא $\emptyset$.

פתרון. יהי $x\in\mathbb{R}$. אזי הקטע $B\left(x,\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}\right)$ מכיל לכל היותר מספר שלם יחיד, ולכן לא נק' הצטברות של $\mathbb{Z}$ על פי המשפט שציטטנו.

תרגיל 41. תהי $S\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהי $x\in S$ נקודה פנימית. הראו ש x היא נקודת הצטברות של x.

פתרון. תהי $x\in S$ נקודה פנימית. אזי קיים r כך ש $B(x,r)\subseteq S$. ברור שלכל $q<r$, $B(x,q)\subseteq B(x,r)\subseteq S$ וברור שכל כדור פתוח ב $\mathbb{R}^n$ היא קבוצה אינסופית. לכן לכל סביבה N של x, ניקח כדור פתוח ברדיוס $q<r$ שמוכל ב N, והוא מכיל אינסוף נקודות של S, ז"א ש N מכילה אינסוף נק' של S וסיימנו על פי המשפט.

תרגיל 42. מצאו את כל נק' הצטברות של $S=\{(p,q)\,|p,q\in\mathbb{Q}\}$ ב $\mathbb{R}^2$.

פתרון. נראה, שקבוצה נק' ההצטברות של S ב $\mathbb{R}^2$ היא כל $\mathbb{R}^2$. תהי $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ויהי $B((x,y),r)$ כדור פתוח ברדיוס r סביב (x,y). על פי שקילות של נורמת ∞ ונורמת 2, קיים r' כך ש

$$B_\infty((x,y),r')=[x-r',x+r']\times[y-r',y+r'] .$$

קיים מספר רציונלי $x<p<x+r',y<q<y+r'$ וכן מתקיים

$$0<\|(x,y)-(p,q)\|_2<r .$$

מפני ש $[x-r',x+r']\times[y-r',y+r']\subseteq B((x,y),r)$ ו $(x,y)\neq(p,q)$.

תרגיל 43. מצאו את כל נקודות ההצטברות של $\overline{B}(x,r)$ ב $\mathbb{R}^n$.

פתרון 44. נהב

ראינו כמה דוגמאות לנק' הצטברות וראינו, שנק' הצטברות של A היא לא בהכרח איבר של A. נשאלת השאלה: אילו קבוצות מכילות את נק' הצטברות שלהן?

משפט 45. יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $S\subseteq X$. אזי S סגורה אם ורק אם S מכילה את כל נק' ההצטברות שלה.

דוגמה 46. מצאו את כל נק' הצטברות של $\overline{B}(0,1)$ ב $\mathbb{R}^n$.

פתרון. ראינו, שכל נקודה פנימית של $\overline{B}(0,1)$ היא נקודת הצטברות, על כן, כל נקודה של $B(0,1)$ היא נקודה פנימית של $\overline{B}(0,1)$ ולכן נק' הצטברות שלה. נראה, שכל נק' שמקיימת $\|x\|=1$ היא גם נק' הצטברות של $\overline{B}(0,1)$. תהי x כך ש $\|x\|=1$. אזי לכל $0<\epsilon$ מתקיים

$$\left\|x-\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)x\right\|=\frac{\epsilon}{2}\|x\|=\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$$

ומצד שני $\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)x\in\overline{B}(0,1)$ כי

$$\left\|\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)x\right\|=\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)\|x\|=\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)<1$$

ו $\|x\|$ היא נקודת הצטברות של $\overline{B}(0,1)$ על פי הדדרת נקודת הצטברות.

תרגיל 47. הראו ש $\mathbb{Z}$ היא קבוצה סגורה ב $\mathbb{R}$.

פתרון. ראינו, שאוסף כל נק' הצטברות של $\mathbb{Z}$ הוא $\emptyset$, $\emptyset\subseteq\mathbb{Z}$ ולכן $\mathbb{Z}$ סגורה על פי המשפט שהבאנו.

הגדרה 48. יהי (X,d) מרחב מטרי ו $S\subseteq X$. נאמר ש $s\in S$ נקודה מבודדת, אם קיים $0<r$ כך ש $B(s,r)\cap S=\{s\}$.

דוגמה 49. כל נקודה של $\mathbb{Z}$ היא נקודה מבודדת, שכן לכל $m\in\mathbb{Z}$, $B(m,1)\cap\mathbb{Z}=\{m\}$.

תרגיל 50. יהי (X,d) מרחב מטרי ו $S\subseteq X$. הראו ש $s\in S$ היא נקודה מבודדת אם ורק אם היא לא נק' הצטברות.

פתרון. נניח ש $s\in S$ נק' מבודדת. אזי קיים $0<r$ כך שלכל $S\cap B(s,r)=\{s\}$ ואינה אינסופית, בסתירה למשפט שאומר שכל סביבה של נק' הצטברות מכילה אינסוף איברי S. עכשיו נניח ש S אינה נקודת הצטברות. אזי קיימת סביבה N של s כך ש $S\cap N<\infty$. אם $S\cap N=\{s\}$ אז סיימנו, מפני שכל כדור $B(s,r)$ שמוכל ב N מקיים $B(s,r)\cap S=\{s\}$. אחרת, נסמן

$$.\{s_1,\ldots,s_n\}=N\cap S\setminus\{s\}$$

נירח $r=\min\{d(s,s_i)\,|1\leq i\leq n\}$. אזי ברור ש $B(s,r)\cap S=\{s\}$ וסיימנו.

קבוצות פתוחות וסגורות בתתי-מרחבים.

כפי שראינו בקורסים באינפי בשנה הראשונה, אנו לעיתים מעוניינים על פונקציות שמוגדרות על תתי-קבוצות של $\mathbb{R}$ ולאו דווקא בפונקציות שמוגדרות על הישר הממשי כולו. המצב לא השתנה, ולהמשך, לעיתים חשוב להבין כיצד נראות תתי-קבוצות פתוחות ביחס לתתי-קבוצות של $\mathbb{R}$ או שהם למעשה תתי-מרחבים מטריים של $\mathbb{R}$.

הערה 51. נזכר שאמרנו שקבוצה S פתוחה ב X. נבהיר של X יש חשיבות. שייתכן שאם $X\subseteq Y$ (עם המטריקה המושרית של Y כמובן), S פתוחה ב X אך אינה פתוחה ב Y.

דוגמה 52. נזהה את הישר הממשי $\mathbb{R}$עם ציר ה x ב $\mathbb{R}^2$, כלמר הקבוצה $\{(x,0)\,|x\in\mathbb{R}\}$. הקבוצה היא פתוחה בתוך עצמה אבל אינה פתוחה ב $\mathbb{R}^2$, שכו כל כדור פתוח סביב נקודה מהצורה $(x,0)$ מכיל נקודה מהצורה (x,y), כאשר $y\neq 0$.

הטענה נכונה גם עבור קבוצות סגורות, שכן הקבוצה $X=(0,1)$ סגורה בתוך עצמה אך אינה סגורה ב $\mathbb{R}$, מפני ש 1 היא נקודת הצטברות של X ב $\mathbb{R}$, ו $1\notin X$ (אבל 1 היא לא נקודת הצטברות של X ב X!!!).

המשפט הבא נותן אפיון לקבוצות פתוחות של תתי-מרחבים.

משפט 53. יהי (X,d) מרחב מטרי, ויהי $Y\subseteq X$ תת-מרחב של X. אזי מתקיים:

1. תת-קבוצה U של Y פתוחה ב Y אם ורק אם קיימת קבוצה פתוחה V ב X כך ש $V\cap Y=U$.

2. תת-קבוצה U של Y סגורה ב Y אם ורק אם קיימת קבוצה סגורה V ב X כך ש $V\cap Y=U$.

הוכחה. נוכיח את החלק הראשון תחילה.

$(\Longrightarrow)$ נניח ש $U=V\cap Y$ עבור קבוצה פתוחה V ב X. מכיוון שכל נק' $u\in U$ היא נק' של V, לכל u קיים r כך ש $B_X(u,r)\subseteq V$ (נסמן כדורים פתוחים ב X וכדורים פתוחים ב Y על ידי B_X ו B_Y בהתאמה, כל מנת למנוע בלבול). נשים לב שמתקיים:

$$\begin{aligned} B_X(u,r)\cap Y &= \\ \{x\in X|d(x,u)<r\}\cap Y &= \\ \{x\in X|d(x,u)<r\wedge x\in Y\} &= \\ \{y\in Y|d(y,u)<r\} &= B_Y(u,r)\,. \end{aligned}$$

אבל $B_X(u,r)\subseteq V$ ולכן מתקיים

$$.B_Y(u,r)=B(u,r)\cap Y\subseteq V\cap Y=U$$

כלמר, הראנו שלכל נקודה $u\in U$ קיים כדור פתוח $B_Y(u,r)\subseteq U$ ולכן U פתוחה ב Y.

$(\Longleftarrow)$ נניח ש U קבוצה פתוחה ב Y. נראה שקיימת V פתוחה ב X כך ש $U=V\cap Y$. מכיוון ש U פתוחה, ניתן להציג אותה על ידי האיחוד

$$U=\bigcup_{i\in I}B_Y(u_i,r_i)$$

על פי המשפט שרשמנו קודם. מצד שני

$$V=\bigcup_{i\in I}B_X(u_i,r_i)$$

היא איחוד של קבוצות פתוחות ולכן פתוחה ומתקיים:

$$\begin{aligned} V \cap Y &= \\ \left(\bigcup_{i\in I} B_X(u_i, r_i)\right) \cap Y &= \\ \bigcup_{i\in I} \left(B_X(u_i, r_i) \cap Y\right) &= \\ \bigcup_{i\in I} B_Y(u_i, r_i) &= U. \end{aligned}$$

כלמר U הינה חיתוך של קבוצה פתוחה ב X ו Y, כנדרש.

הוכחה. על מנת להוכיח את החלק השני, נשים לב שאם $U \subseteq Y$ היא קבוצה סגודרה ב Y, אזי $Y \setminus U$ היא קבוצה פתוחה ב Y. על פי החלק הראשון, קיימת V פתוחה ב X כך ש $Y \cap V = Y \setminus U$. אזי

$$U = Y \cap (X \setminus V)$$

והיא ו $(X \setminus V)$ היא סגורה ב X. $\square$

$\square$

תרגיל 54. הוכיחו את הטענות הבאות:

1. אם Y היא תת-קבוצה פתוחה של X ו Z היא תת-קבוצה פתוחה של Y אזי Z היא תת-קבוצה פתוחה של X.
2. אם Y היא תת-קבוצה סגורה של X ו Z היא תת-קבוצה סגורה של Y אזי Z היא תת-קבוצה סגורה של X.

פתרון 55.

1. נניח ש Z היא תת-קבוצה פתוחה של Y. אזי על פי המשפט שהבאנו, קיימת V פתוחה ב X כך ש $Z = Y \cap U$. אבל Y פתוחה ב X ולכן $U \cap Y$ פתוחה ב X.
2. באותו אופן - פשוט מחליפים כל מקום שמופיע סגורה בפתוחה.

פנים וסגור

הגדרה 56. יהי (X, d) מרחב מטרי ותהי $U \subseteq X$. אזי הסגור של U מוגדר על ידי החיתוך

$$\overline{U} = \bigcap_S S$$

עבור כל הקבוצות הסגורות S שמכילות את U.

במילים אחרות כקבוצה הקטנה ביותר שמכילה את U. את התנאי של החיתוך ניתן לרשום באופן הבא: $\overline{U}$ היא קבוצה סגורה אשר מקיימת:

1. $U \subseteq \overline{U}$.

2. אם $U \subseteq V \subset \overline{U}$,)אזי V אינה סגורה.

3. אם V סבגורה ו $U \subseteq V$ אזי $\overline{U} \subseteq V$.

נשים לב, ששני התנאים האחרונים שקולים. בנוסף, מכיוון שהסגור מוגדר על ידי חיתוך של סגורות, הוא קבוצה סגורה.
לעיתים נסמן $cl\left(U\right)$ במקום $\overline{U}$.

דוגמה 57. הסגור של $\left(0,1\right)$ ב $\mathbb{R}$ הוא הקטע הסגור $\left[0,1\right]$.

הוכחה. נשים לב ש $\left[0,1\right]$ קבוצה סגורה שמכילה את $\left(0,1\right)$. כמו כן, $\left[0,1\right)$ ו $\left(0,1\right]$ אינן סגרות, מכיוון שהן לא מכילות את נקודות ההצטברות שלהן. $\square$

הגדרה 58. יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ויהי $A \subseteq X$. נסמן על ידי A' את אוסף הנקודות הצטברות של A.

משפט 59. אזי $\overline{A} = A' \cup A$.

תרגיל 60. הראו, ש $\overline{\mathbb{Q}}$ ב $\mathbb{R}$ הוא $\mathbb{R}$.

פתרון. ראינו, ש $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. הטענה נובעת מהמשפט.

הגדרה 61. יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ו $A \subseteq X$. הפנים של A שיסומן על ידי A° או על ידי $int\left(A\right)$ הוא מוגדר על ידי האיחוד

$$A = \bigcup_{S} S$$

על פני כל הקבוצות הפתוחות שמוכלות ב A.
כלמר, A° היא הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמוכלת ב A. זאת אומרת,A°היא הקבוצה הפתוחה אשר מקיימת:

1. $A^{\circ} \subseteq A$.

2. אם $A^{\circ} \subset B$ (הכלה ממש ו $B \subseteq A$), ו $B \subseteq A$ אזי B אינה קבוצה פתוחה.

3. אם $B \subseteq A$ ו B פתוחה, אזי $B \subseteq A^{\circ}$.

שוב, 2 ו 3 הם ניסוחים שקולים של אותו התנאי. בנוסף, מכיוון ש A° מוגדר כאיחוד של פתוחות, הוא קבוצה פתוחה.

דוגמה 62. הפנים של $\overline{B}\left(0,1\right)$ ב $\mathbb{R}^n$ היא $B\left(0,1\right)$, מכיוון ש $B\left(0,1\right)$ פתוחה ומצד שני אם $x \in \overline{B}\left(0,1\right)$ אזי $\|x\| = 1$. אזי לכל $\epsilon > 0$,

$$\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)x \in B\left(x,\epsilon\right)$$

ומצד שני $\left\|\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)x\right\| = 1+\frac{\epsilon}{2}$ ולכן

$$\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)x \notin \overline{B}\left(x,\epsilon\right).$$

תרגיל 63. הראו, ש A° שווה לאוסף הנקודות הפנימיות של A.

פתרון. נניח ש $a \in A$ היא נקודה פנימית של A. אזי קיימת סביבה פתוחה של U של a כך ש $U \subseteq A$. לכן, $U \subseteq A^\circ$ ו $a \in A$. מצד שני, אם $a \in A^\circ$ היא נקודה פנימית של A°, מפני ש A° היא קבוצה פתוחה, ואם היא נקודה פנימית של A°היא גם נקודה פנימית של A.

תרגיל 64. הוכיחו שמתקיים

$$cl\left(A\right) = int\left(\left(A^c\right)\right)^c$$

כאשר A^c משלם את A משלים במרחב מטרי X.

פתרון 65. על פי ההגדרה,

$$cl\left(A\right) = \bigcap_{A \subseteq S} S$$

על פני כל הקבוצות S שמכילות את A. אם S היא קבוצה סגורה שמכילה את A, S^c היא קבוצה פתוחה שמוכלת ב A^c. נשתמש בדה-מורגן ונקב

$$cl\left(A\right) = \bigcap_{A \subseteq S} S = \left(\bigcup_{S^c \subseteq A^c} S^c\right)^c$$

והסוגריים השניים הם בדיוק ההגדרה של הסגור.

הגדרה. יהי (X, d) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$. אזי השפה של A, מסומנת על ידי ∂A מוגדרת על ידי

$$.\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$$

דוגמה 66. השפה של כדור פתוח $B\left(0,1\right)$ ב $\mathbb{R}^n$ הוא ספרת היחידה

$$,\left\{x \middle| \left\|x\right\| = 1\right\}$$

כי כמו שראינו, $cl\left(B\left(0,1\right)\right) = \overline{B}\left(0,1\right)$ (הסימון מצדיק את עצמו...) ו $B\left(0,1\right)^\circ = B\left(0,1\right)$. נפעיל את ההדרגה ונקבל את המבוקש.