בס"ד

פיתרון תרגיל 3

שאלה 1

חשב את האינטגרלים הבאים בעזרת שיטות האינטגרציה לפי חלקים.

פתרון: נזכיר את הנוסחה בשיטת האינטגרציה לפי חלקים:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \quad (1)$$

1 נסמן: $v'(x) = e^{-x}, u(x) = x$ אזי $v(x) = -e^{-x}, u'(x) = 1$

נציג בנוסחה (1) ונקבל

$$\int xe^{-x}dx = \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx =$$
$$= -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

.2 נסמן $u(x) = x$ $v'(x) = x\sqrt{a^2+x^2}$ אזי $v(x) = \frac{1}{3}\left(a^2+x^2\right)^{3/2}, u^1(x) = 1$

נציג בנוסחה (1) ונקבל

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\cdot dx = \int xd\left(\frac{1}{3}\left(a^2+x^2\right)^{3/2}\right) = \frac{x}{3}\left(a^2+x^2\right)^{3/2} - \frac{1}{3}\int\left(a^2+x^2\right)\sqrt{a^2+x^2}dx + c =$$
$$= \frac{x}{4}\left(a^2+x^2\right)^{3/2} - \frac{a^2}{2}\int \sqrt{a^2+x^2}dx + c$$

נחשב האינטגרל האחרון גם לפי שיטת האינטגרציה לפי חלקים

נסמן $v'(x) = 1$, $u(x) = \sqrt{a^2+x^2}$ אזי $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}, v(x) = x$

נציג בנוסחה (1) ונקבל

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{\left(a^2+x^2\right)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx =$$
$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int\sqrt{a^2+x^2}dx + a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + c$$

קבלנו משוואה עם נעלם $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$

נעביר את האינטגרל מאגף ימין לאגף שמאל ונקבל

ובתשובה סופית

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\cdot dx=\frac{x}{4}\left(a^2+x^2\right)^{3/2}-\frac{a^2}{2}\left(\frac{x^2}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right)+c$$

3. נסמן $u(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, v'(x)=\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$ אזי

$$v(x)=e^{\arctan x}, u'(x)=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$$

נציג בנוסחה (1) ונקבל

$$\int\frac{xe^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{aretan x}-\int\frac{e^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$$

נחשב האינטגרל האחרון גם לפי שיטת האינטגרציה לפי חלקים

נסמן $u(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $v'(x)=\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$ אזי

$$u'(x)=\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}, v(x)=e^{\arctan x}$$

נציג בנוסחה (1) ונקבל

$$\int\frac{e^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}=\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int-\frac{e^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx=$$

$$=\frac{e^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}+\int\frac{xe^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$$

כמו בדוגמא קודמת קיבלנו משוואה עם נעלם עכשיו ניתן לחלץ מהמשוואה את הפיתרון

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int - \frac{xe^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx =$$

$$= \int \frac{xe^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x} + c$$

.4 נשתמש כי $\sin 2x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)$

$$\int e^{2x}\sin^2 xdx = \int e^{2x}\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}dx - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2xdx =$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2xdx$$

נחשב אינטגרל האחרון בשיטת אינטראקציה לפי חלקים

נסמן $u(x) = \cos 2x$, $v'(x) = e^{2x}$ אזי

$$v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}, u'(x) = -2\sin 2x$$

נציב בנוסחה (1) ונקבל

$$(2)\ \int e^{2x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + \int e^{2x}\sin 2x\,dx$$

נחשב האינטגרל האחרון בשיטת אינטגרציה לפי חלקים

נסמן $u(x) = \sin 2x$, $v'(x) = e^{2x}$ אזי $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}, u'(x) = 2\cos 2x$

נציב בנוסחה (1) ונקבל

$$(3)\ \int e^{2x}\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x - \int e^{2x}\cos 2x\,dx$$

מ(2) ו (3) מקבלים משוואה עבור נעלם $\int e^{2x}\cos 2xdx$

$$\int e^{2x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + \left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x - \int e^{2x}\cos 2x\,dx\right)$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\cos 2x = \frac{1}{4}e^{2x}\left(\cos 2x + \sin 2x\right) + c$$

נחזור לאינטגרל שלנו ונקבל

$$\int e^{2x}\sin^2 xdx = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}*\frac{1}{4}\left(e^{2x}\cos 2x + \sin 2x + c\right) =$$
$$= \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x}\left(\cos 2x + \sin 2x\right) + c$$

.5 עבור $n=1$ $\int \sin xdx = -\cos x + c$, עבור n=2

$$\int \sin^2 xdx = \frac{1}{2}\int\left(1-\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

עבור $n>2$ נסמן $u(x) = \sin^{n-1} x$, $v'(x) = \sin x$ אזי

$$u'(x) = \left(n-1\right)\sin^{n-1} x\cos 2x$$
$$v(x) = -\cos x$$

נציג בנוסחה (1) ונקבל

$$I_n = \int \sin^n xdx = -\cos x\sin^{n-1} x + \left(n+1\right)\int \sin^{n-2} x\cdot\cos^2 xdx =$$
$$= -\cos x\sin^{n-1} x + \left(n-1\right)\int \sin^2 x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)dx =$$
$$= -\cos x\sin^{n-1} x + \left(n-1\right)\left(\int \sin^{n-2} xdx - \int \sin^n xdx\right) =$$
$$= -\cos x\sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow$$
$$I_n = \frac{1}{n}((n-1)I_{N-2} - \cos x\sin^{n-1} x) : \text{n} > 2$$ עבור

שאלה 2

חשב את האינטגרלים הבאים בעזרת שטח ההצבה

.1 ההצבה היא $2x+3=t^6 \Leftarrow x=\frac{t^6-3}{2}$ ולכן $dx=3t^5dt$

$$\int x\sqrt[6]{2x+3}dx=\int\frac{t^6-3}{2}t\cdot 3t^5dt=\frac{3}{2}\int\left(t^6-3\right)t^6=\frac{3}{2}\int\left(t^{12}-3t^6\right)dt=$$
$$=\frac{3}{2}\frac{t^{13}}{13}-\frac{1}{2}\frac{t^7}{7}+c=\frac{39}{2}t^{13}-\frac{1}{14}t^7+c$$

.2 ההצבה היא $x+1=t^2 \Leftarrow x=t^2-1$ ולכן $dx=2tdt$

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{x-\sqrt{x+1}+1}dx=\int\frac{t+2}{t^2-t}\cdot dt+t=2\int\frac{t-1+3}{t-1}dt=2\int\left(dt+3\int\frac{dt}{t-1}\right)=$$
$$=2t+6\ln|t-1|+c=2\sqrt{x+1}+6\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+c$$

.3 ההצבה היא $t^2=9-x^2 \Leftarrow -1-2xdx=2tdt$ ולכן

$$\int x^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{dx}=\int x^2\sqrt{9-x^2}\mathrm{xdx}=\int 9-t^2\ \mathrm{t(-t)dt}=$$

$$=-9\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+c=-3\sqrt{(9-x^2)^3}+\frac{1}{5}\sqrt{(9-x^2)^5}+c$$
$$=-3(9-x^2)^{3/2}+\frac{1}{5}(9-x^2)^{5/2}+c$$

.4 ההצבה היא $x=a\sin t \Leftarrow dx=a\cos tdt$ ולכן

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{a^2\sin^2t}{\sqrt{a^2\left(1-\sin^2t\right)}}a\cos t2t=\int\frac{a^2\sin^2t}{\sqrt{a^2\cos^2t}}a\cos tdt=a^2\int\sin^2tdt=$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+c$$

נחזור למשתנה המקורי x. השתמשנו בהצבה $x=a\sin t \Leftarrow$ $t=\arcsin\frac{x}{a}$

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2t}=2(\arcsin\frac{x}{a})\sqrt{1-\sin^2\arcsin t\ \frac{x}{a}}=$$
$$=2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$$

ולכן התשובה היא

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)\right] + c = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c$$

5. ההצבה היא $x = \sinh t$ $\Leftarrow$ ולכן $dx = a\cosh t dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a\cosh t}{\sqrt{a^2+a^2\sinh^2 t}}dt = \int \frac{a\cosh t}{a\cosh t}dt = t + c$$

נשאר לנו לחזור למשתנה המקורי X. לשם כך עלינו למצוא את t כפונקציה של x מההצבה

$x = a\sinh t$ $\Leftarrow$ $\sinh t = \frac{x}{a}$ ומן הזהות $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ $\Leftarrow$

$$\cosh t = \sqrt{1+\sinh t^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

מן ההצבה של sinht ו- cosht ברור כי $e^t = \sinh t + \cosh t = \frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$

ולכן $t = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln a$ ולכן התשובה היא $\int \frac{dz}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + c$