חשבון אינפי 2

תרגיל 3- פתרון

שאלה 1 :

$$f(x) = x - 2\arctan x$$

פתרון:

תחום הגדרה: הפונקציה מוגדרת לכל x.

זוגיות: tg אי זוגית ולכן $\arctan$ אי זוגית (שימו לב שהדבר אינה נכון עבור פונקציות זוגיות. הרי לפונקציה זוגית אין הופכית בסביבה של אפס כי היא לא חח"ע בסביבה של אפס). x כמובן אי זוגית וכך גם כל צירוף לינארי של שתי הפונקציות האלה ולכן $f(x)$ הינה פונקציה אי זוגית.

תחומי עליה ירידה ונקודות קיצון:

הפונקציה גזירה בכל הממשיים, לכן בנקודות קיצון הנגזרת חייבת להתאפס. $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2}$ היא מתאפסת בשתי נקודות $x = \pm 1$. היא חיובית כאשר $|x| > 1$ ושלילית כאשר $|x| < 1$ ולכן הפונקציה המקורית עולה כאשר $|x| > 1$ ויורדת כאשר $|x| < 1$. בנוסף ניתן ללמוד מכך ש $x = 1$ נקודת מינימום ו $x = -1$ נקודת מקסימום.

תחומי קמירות:

נגזור פעם שנייה $f''(x)=-\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}$ ולכן הפונקציה קמורה כלפי מטה עבור $x>0$ וקמורה כלפי מעלה עבור $x<0$. הנגזרת השנייה מחליפה סימן בנקודה אפס ולכן זוהי נקודת פיתול בהכרח.

אסימפטוטות:

הפונקציה רציפה לכל x ולכן אין לה אסימפטוטות אנכיות.

$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2\arctan x}{x})=1$ לכן יש לה אסימפטוטה משופעת באינסוף עם שיפוע 1.

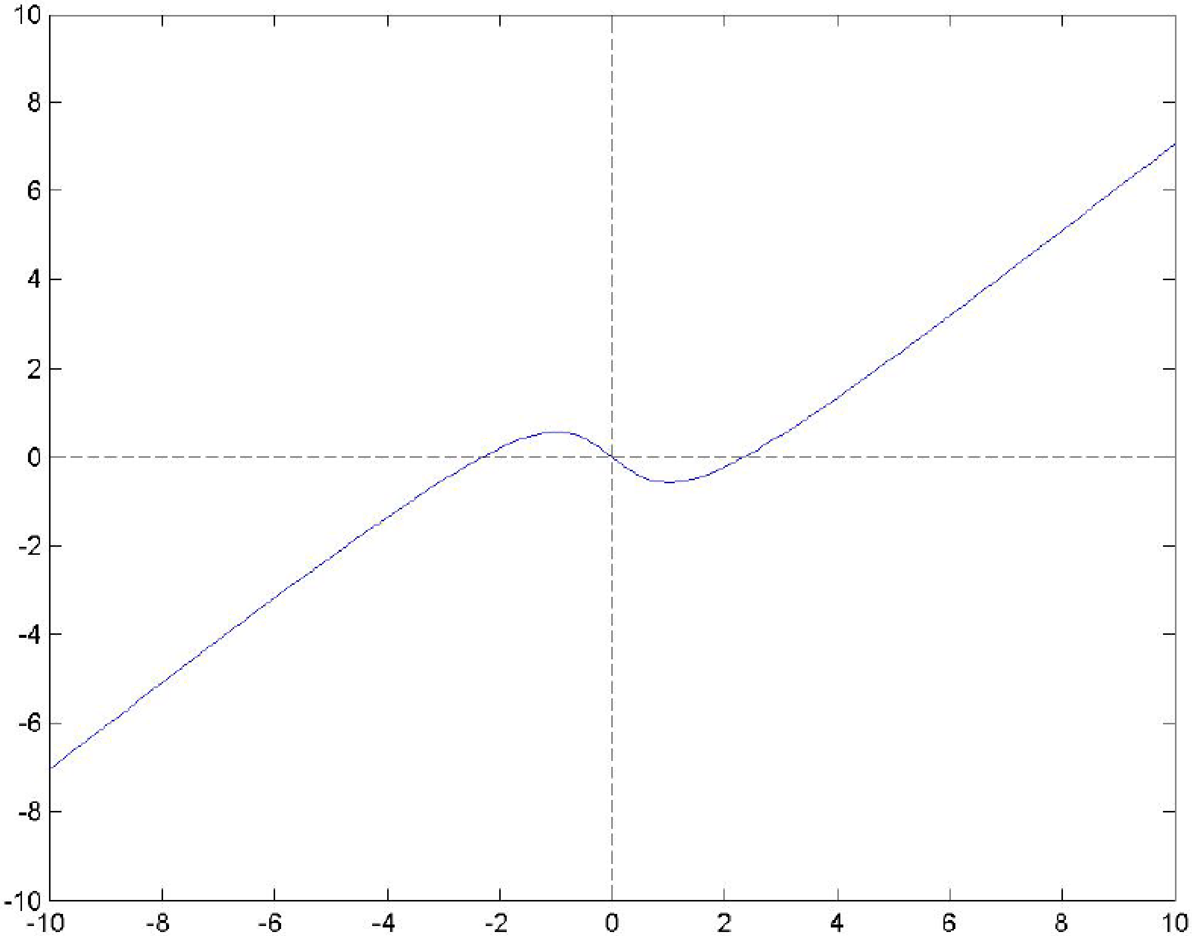
מכיוון שהיא אי זוגית גם במינוס אינסוף יש לה אסימפטוטה משופעת באותו השיפוע. (שימו לב שאם הפונקציה הייתה זוגית, השיפוע במינוס אינסוף היה מינוס השיפוע באינסוף). נמשיך לחשב את האסימפטוטה: $b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-2\arctan x-x\right)=\pi$. במינוס אינסוף הקבוע הינו $-\pi$ (שימו לב: בפונקציה זוגית הקבוע היה אותו קבוע במינוס אינסוף).

ולכן האסימפטוטות של הפונקציה הן $y=x+\pi$ באינסוף ו $y=x-\pi$ במינוס אינסוף.

חיתוך עם הצירים:

כאשר $x=0$ הפונקציה שווה אפס ולכן $(0,0)$ היא נקודת חיתוך של הצירים. לא נוכל לחשב במדויק את שאר נקודות החיתוך עם ציר x אך נדע בדיוק כמה הן, ובערך היכן הן נמצאות. מכיוון שהנגזרת מתאפסת בדיוק פעמיים לא יכולות להיות יותר מ3 נקודות בהן הפונקציה מתאפסת (משפט רול). מצאנו אחת, נוכיח שקיימות עוד 2. אנו יודעים שגבול הפונקציה באינסוף הוא אינסוף ולכן הפונקציה חיובית החלק ממקום מסוים והלאה, לכן קיים $a>1$ כך ש $f(a)>0$. נציב $f(1)=1-2\frac{\pi}{4}<0$.

לפי משפט ערך הביניים קיים $b\in(1,a)$ כך ש $f(b)=0$ ומתוך אי זוגיות $f(-b)=0$ ומצאנו שתי נקודות כאלה כנדרש.



2. $f\left(x\right)=x^{x}$ בתחום $x>0$

א. תחום ההגדרה: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x>0\right\}$

ב. תחומי עליה וירידה

$$\ln f=x\ln x$$

$$\frac{f'}{f}=\ln x+1$$

$$f'\left(x\right)=x^{x}\left(\ln x+1\right)=0$$

$$\ln x=-1$$

$$x=\frac{1}{e}$$

לכל $0<x<\frac{1}{e}$ מתקיים $f'<0$ ולכן $0<x<\frac{1}{e}$ תחום ירידה

ולכל $x>\frac{1}{e}$ מתקיים $f'>0$ ולכן $x>\frac{1}{e}$ תחום עליה

ג. $\left(\frac{1}{e},\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\right)$ נקודת מינימום

ד. תחומי קמירות

$$f''=\left(x^x\left(\ln x+1\right)\right)'=x^x\left(\ln x+1\right)^2+x^{x-1}=x^{x-1}\left(x\left(\ln x+1\right)^2+1\right)>0$$

לכל $x>0$ ולכן הפונקציה קעורה כלפי מעלה (מחייכת) בכל תחום הגדרתה.

ה. אסימפטוטות

נבדוק האם יש אסימפטוטה אנכית ב- $x=0$ מימין

$\lim_{x\to 0+} x^x=1$ ולכן אין אסימפטוטות אנכיות לפונקציה.

הסבר לחישוב הגבול:

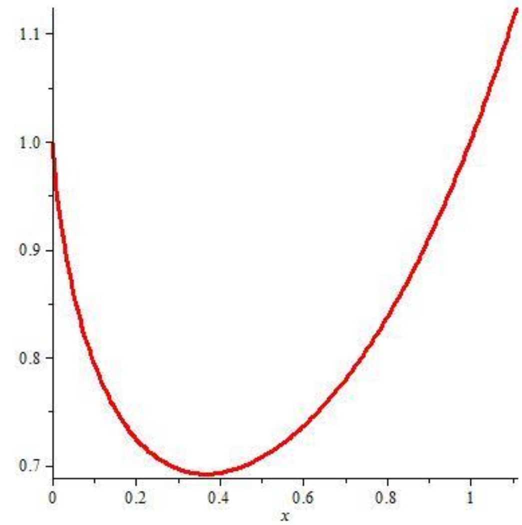
$$\lim_{x\to 0+}\ln f=\lim_{x\to 0+}x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}\left(-x\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0+} f=e^0=1$$

נבדוק האם יש אסימפטוטה משופעת (בפרט אופקית)

$a=\lim_{x\to\infty}\frac{x^x}{x}=\lim_{x\to\infty}x^{x-1}=\infty$ ולכן אין אסימפטוטה משופעת

ו. הסקיצה של הגרף



.3 $y = x+\sin(2x)$ (בקטע $[-2\pi, 2\pi]$)

א.
$[-2\pi, 2\pi]$

ב. $y(-x) = -x+\sin(-2x) = -x-\sin(2x) = -y(x)$ ולכן הפונקציה אי זוגית.

ג. חיתוך עם ציר ה- x : $x+\sin(2x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ולכן $(0,0)$ נקודת חיתוך עם ציר ה- x
.
חיתוך עם ציר ה- y : $(0,0)$.

ד. נקודות קיצון

$$y' = 1+2\cos(2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} \vee 2x = \frac{4\pi}{3} \vee 2x = \frac{8\pi}{3} \vee 2x = \frac{10\pi}{3} \vee 2x = -\frac{2\pi}{3} \vee 2x = -\frac{4\pi}{3} \vee 2x = -\frac{8\pi}{3} \vee 2x = -\frac{10\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{4\pi}{3} \vee x = -\frac{5\pi}{3}$$

כדי לבדוק האם הנקודות שמצאנו הן נקודות קיצון נגזור פעם נוספת ונבדוק סימן של הנגזרת השנייה בנקודות הללו.

$$y'' = -4\sin(2x)$$
$$y''\left(\frac{\pi}{3}\right), y''\left(\frac{4\pi}{3}\right), y''\left(-\frac{2\pi}{3}\right), y''\left(-\frac{5\pi}{3}\right) < 0$$

ולכן הנקודות

$$\left(\frac{\pi}{3}, y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), \left(\frac{4\pi}{3}, y\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right), \left(-\frac{2\pi}{3}, y\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right), \left(-\frac{5\pi}{3}, y\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

הן נקודות מקסימום מקומי של הפונקציה.

$$y''\left(\frac{2\pi}{3}\right),y''\left(\frac{5\pi}{3}\right),y''\left(-\frac{\pi}{3}\right),y''\left(-\frac{4\pi}{3}\right)>0$$

ולכן הנקודות

$$\left(\frac{2\pi}{3},y\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right),\left(\frac{5\pi}{3},y\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right),\left(-\frac{\pi}{3},y\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right),\left(-\frac{4\pi}{3},y\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

הן נקודות מינימום מקומי של הפונקציה.

ה. תחומי עלייה וירידה:

תחומי עלייה:

$$\left(-2\pi,-\frac{5\pi}{3}\right)\cup\left(-\frac{4\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$$

תחומי ירידה:

$$\left(-\frac{5\pi}{3},-\frac{4\pi}{3}\right)\cup\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$$

ו. נקודות פיתול:

$$y''=-4\sin(2x)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x=\pi n$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi n}{2}\quad n=-3,-2,-1,0,1,2,3$$

צריך לבדוק את סימני הנגזרת השנייה מסביב לנקודות הללו.

הסימנים מתחלפים ולכן הנקודות

$$\left(-\frac{3\pi}{2},y\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right),\left(-\pi,y(-\pi)\right),\left(-\frac{\pi}{2},y\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right),\left(0,y(0)\right),$$
$$\left(\frac{\pi}{2},y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),\left(\pi,y(\pi)\right),\left(\frac{3\pi}{2},y\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

הן נקודות פיתול.

ז. תחומי קעירות:

תחומי קעירות כלפי מטה:

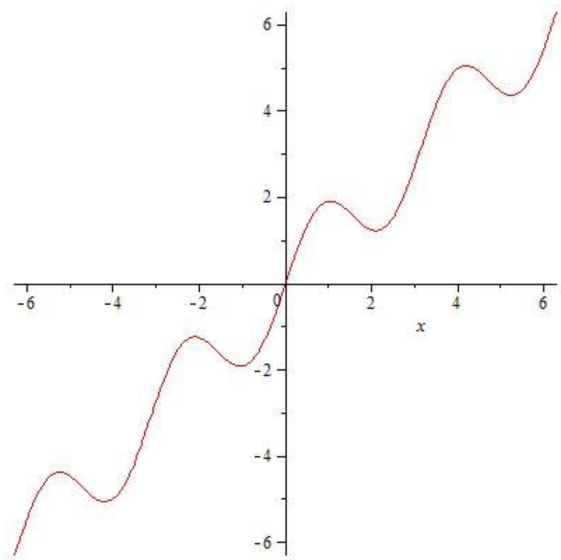
$$\left(-2\pi,-\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$$

תחומי קעירות כלפי מעלה:

$$\left(-\frac{3\pi}{2},-\pi\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$$

ח. לפונקציה אין אסימפטוטות, כי בקצוות הקטע הפונקציה רציפה (משמאל בקצה הימני ומימין בקצה השמאלי) ובתוך הקטע הפונקציה מוגדרת ורציפה בכל הנקודות.

ט.



4. $f\left(x\right)=\frac{\left|1-x^2\right|}{x}$

א. תחום ההגדרה $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$

ב. זוגיות

$f\left(-x\right)=\frac{\left|1-x^2\right|}{-x}=-f\left(x\right)$ ולכן הפונקציה אי זוגית, כלומר הגרף סימטרי ביחס לראשית הצירים.

ג. תחומי עליה וירידה

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1-x^2}{x} & -1<x<1, x\neq 0\\ \frac{x^2-1}{x} & x<-1\vee x>1\\ 0 & x=\pm 1\end{cases}$$

ולכן

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}-1 & -1<x<1, x\neq 0\\ 1+\frac{1}{x^2} & x<-1\vee x>1\end{cases}$$

בנקודות $x=\pm 1$ הנגזרת אינה מוגדרת ולכן נקודות אילו חשודות לקיצון.

תחומי עליה $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

תחומי ירידה $(-1,0)\cup(0,1)$

ד. נקודות קיצון

$(-1,0)$ נקודת מקסימום

$(1,0)$ נקודת מינימום

ה. תחומי קמירות

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3} & -1<x<1, x\neq 0\\ -\frac{2}{x^3} & x<-1\vee x>1\end{cases}$$

$f''>0$ עבור $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ ולכן אילו תחומי קעירות כלפי מעלה (הפונקציה "מחייכת" בתחומים אילו)

$f''<0$ עבור $(-1,0)\cup(1,\infty)$ ולכן אילו תחומי קעירות כלפי מטה (הפונקציה "בוכה" בתחומים אילו)

ו. אסימפטוטות

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|1-x^2|}{x}=\infty$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{|1-x^2|}{x}=-\infty$$

ולכן $x=0$ אסימפטוטה אנכית גם מימין וגם משמאל

נמצא האם יש אסימפטוטות משופעות (בפרט אופקיות)

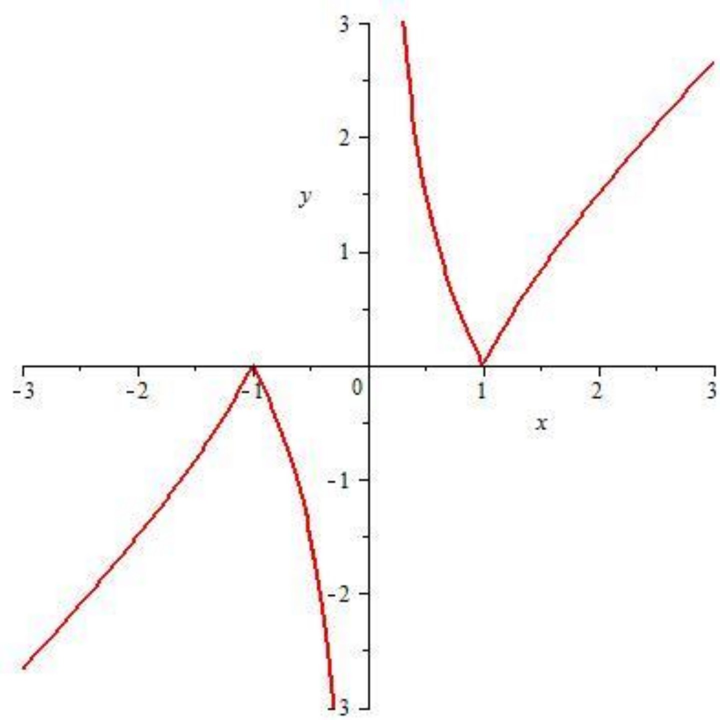
באינסוף:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|1-x^2\right|}{x^2}=1$$
$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|1-x^2\right|}{x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|1-x^2\right|-x^2}{x}=0$$

ולכן משוואת האסימפטוטה המשופעת באינסוף הינה $y=x$.

כנ"ל במינוס אינסוף נקבל $y=x$.

ז. הסקיצה של הגרף



שאלה 2:

הישר עובר דרך הנקודה $(3,4)$ ומשוואתו מהצורה $y=ax+b$ ולכן $b=4-3a$.

נקודות החיתוך של הישר עם הצירים הן $\left(\frac{3a-4}{a},0\right),(0,4-3a)$.

שטח המשולש הנוצר הינו:

$$. S(a)=\frac{(4-3a)}{2}\cdot\left(\frac{3a-4}{a}\right)=-\frac{(4-3a)^2}{2a}$$

נמצא את נקודת המינימום של פונקציה זו:

$$S'(a)=\frac{16-9a^2}{2a^2}=0$$

$$a=\pm\frac{4}{3}$$

המינימום מתקבל בנקודה $a=-\frac{4}{3}$ ולכן משוואת הישר הינה:

$$y=-\frac{4}{3}x+8$$

שאלה 3 מצאו את כל האסימפטוטות של הפונקציה $y=2x-\arccos\frac{1}{x}$.

פתרון:

תחום ההגדרה של הפונקציה

$$-1\le\frac{1}{x}\le 1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le\frac{1}{x}\\ \frac{1}{x}\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1+x}{x}\ge 0\\ \frac{1-x}{x}\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left((-\infty,-1]\cup(0,\infty)\right)\cap\left((-\infty,0)\cup[1,\infty)\right)$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$$

כלומר $D_y=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

לפונקציה אין אסימפטוטות אנכיות (שימו לב: לא בודקים את $x=0$ לאסימפטוטה, כי הפונקציה לא מוגדרת בסביבה של $x=0$)

נמצא את האסימפטוטות האופקיות:

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\left(2x-\arccos\frac{1}{x}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-\arccos\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

ולכן לפונקציה אין אסימפטוטות אופקיות.

נמצא את האסימפטוטות המשופעות $y=ax+b$:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{\arccos\frac{1}{x}}{x}\right)=2$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-ax\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2x-\arccos\frac{1}{x}-2x\right)=-\frac{\pi}{2}$$

ולכן לפונקציה יש אסימפטוטה משופעת אחת $y=2x-\frac{\pi}{2}$.