נכתב על ידי יהונתן רגב

רשימת הוכחות

1. **אם יש לקבוצה חסם תחתון, אז הוא יחיד, ויסומן $infA$.**

הוכחה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

נניח כי b, c חסמים תחתונים של A.

b בפרט חסם מלרע של A, לכן (c חסם תחתון): $c \leq b$.

c בפרט חסם מלרע של A, לכן (b חסם תחתון): $b \leq c$.

לכן: $b = c$.

לכן: $infA$ יחיד.

■

2. **<u>צפיפות $\mathbb{Q}$ ב - $\mathbb{R}$</u>: בין כל שני מספרים ממשיים, יש מספר רציונאלי.**

הוכחה

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, כך ש - $a < b$.

$0 < b - a$, לכן עפ״י תכונת ארכימדס, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש - $1 < n \cdot (b - a)$.

הקבוצה $\phi \neq \{m \in \mathbb{Z} : m < n \cdot b\} \subseteq \mathbb{Z}$ וחסומה מלעיל (למשל ע״י $n \cdot b$), לכן עפ״י למה (לכל קבוצה $\phi \neq A \subseteq \mathbb{Z}$ קיים מקסימום), $k \coloneqq max\{m \in \mathbb{Z} : m < n \cdot b\}$ קיים.

אם: $k \leq n \cdot a$ אז: $k + 1 \leq n \cdot a + 1 < n \cdot b$, בסתירה למקסימאליות של k.

לכן: $n \cdot a < k$, ז״א: $n \cdot a < k < n \cdot b$, לכן: $a < \frac{\overbrace{k}^{\in\mathbb{Q}}}{n} < b$, כדרוש.

■

3. **<u>יחידות הגבול</u>: אם a, b, $lim_{n\to\infty} a_n = a, b$, אז: $a = b$.**

הוכחה

נניח בלי הגבלת הכלליות: $a < b$.

יהי $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$.

- $b - \varepsilon > b - \frac{b-a}{2} = a + \frac{b-a}{2} > a + \varepsilon$, לכן: $|b - a| > 2 \cdot \varepsilon$.
- $a_n \to a$, לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_1 < n \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \varepsilon$.

בנוסף: $a_n \to b$, לכן קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_2 < n \in \mathbb{N}$: $|a_n - b| < \varepsilon$.

לכן, עבור $N = \max\{N_1, N_2\}$, מתקיים:

$$|b-a| = |(a_n - a) - (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2 \cdot \varepsilon$$

לכן: $2 \cdot \varepsilon > |b-a| < 2 \cdot \varepsilon$. סתירה.

לכן: $a = b$.

■

4. אם $lim_{n\to\infty} a_n = a$ ו- $lim_{n\to\infty} b_n = b$, אז: $lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.

הוכחה

עפ"י למה (סדרה מתכנסת חסומה), קיים $M_1 \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$: $|a_n| < M_1$, וקיים $M_2 \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$: $|b_n| < M_2$.

כעת, נגדיר: $T = max\{|a|, |b|, M_1, M_2\}$.

אם $T = 0$, אזי לכל $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 0 \to 0$ ו- $b_n = 0 \to 0$, לכן:

$$a_n \cdot b_n = 0 \cdot 0 = 0 \to 0 = a \cdot b$$

לכן: $0 < T$.

יהי $0 < \varepsilon$.

$a_n \to a$, לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_1 < n \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot T}$.

$b_n \to b$, לכן קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_2 < n \in \mathbb{N}$: $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot T}$.

נגדיר $N = \max\{N_1, N_2\}$. לכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b|$$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leq |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n| + |a \cdot b_n - a \cdot b|$$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|$$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < M_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T} < T \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T} + T \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T}$$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < 2 \cdot T \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T} = \varepsilon$$

לכן: $lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.

■

5. <u>משפט הסנדוויץ'</u>: תהיינה a_n, b_n שתי סדרות המתכנסות לאותו גבול c, ותהי c_n סדרה שלישית. אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq c_n \leq b_n$, אז: $\lim_{n\to\infty} c_n$.

הוכחה

יהי $0 < \varepsilon$.

$a_n \to c$, לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_1 < n \in \mathbb{N}$: $|a_n - c| < \varepsilon$.

$b_n \to c$, לכן קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_2 < n \in \mathbb{N}$: $|b_n - c| < \varepsilon$.

נגדיר: $N' = \max\{N, N_1, N_2\}$. לכל $N' < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$c - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < c + \varepsilon$$

לכן: $|c_n - c| < \varepsilon$, לכן: $\lim_{n\to\infty} c_n$.

■

6. **כל סדרה עולה וחסומה מתכנסת לסופרמום שלה. כל סדרה יורדת וחסומה מתכנסת לאינפימום שלה.**

הוכחה

נוכיח את הטענה הראשונה (הטענה השנייה באופן דומה).

תהי a_n סדרה עולה וחסומה.

עפ"י אקסיומת החסם העליון $s := supA$ קיים.

יהי $0 < \varepsilon$.

עפ"י תכונות של חסם עליון, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $s - \varepsilon < a_N < s$.

לכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n < s$$

לכן: $0 < s - a_n < \varepsilon$, ז"א: $|a_n - s| < \varepsilon$, לכן a_n מתכנסת ומתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s = supA$$

■

7. **סדרה עולה שאינה חסומה מלעיל שואפת ל-∞. סדרה יורדת שאינה חסומה מלרע שואפת ל-$-\infty$.**

הוכחה

נוכיח את הטענה הראשונה (הטענה השנייה באופן דומה).

תהי a_n סדרה עולה שאינה חסומה מלעיל.

יהי $M \in \mathbb{R}$.

a_n אינה חסומה מלעיל, לכן M אינו חסם מלעיל, לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $M < a_N$.

a_n עולה לכן, לכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $M < a_N \leq a_n$, לכן: $M < a_n$, לכן:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

■

8. **<u>משפט בולצאנו ויירשטרס</u>: לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.**

הוכחה

תהי a_n סדרה.

נאמר שאיבר a_m הוא נקודת שיא, אם לכל $m < n$ מתקיים: $a_m \geq a_n$.

קיימים שני מקרים:

1. יש בסדרה אינסוף נקודות שיא.

   נמספר אותן בסדר עולה: $\cdots \geq a_{m_3} \geq a_{m_2} \geq a_{m_1}$, $(m_1 < m_2 < m_3 < \cdots)$.

   קיבלנו תת סדרה יורדת a_{m_n}.

   a_n חסומה, לכן: a_{m_n} חסומה.

   לכן: a_{m_n} יורדת וחסומה, ועפ"י משפט מתכנסת.

2. יש בסדרה מספר סופי של נקודות שיא.

   נסמן m_1 כך ש - a_{m_1} אינה נקודת שיא, ולכל $m_1 < n$: a_n אינה נקודת שיא.

   a_{m_1} אינה נקודת שיא, לכן קיים $m_1 < m_2$ כך ש - $a_{m_1} < a_{m_2}$.

   a_{m_2} אינה נקודת שיא (הרי $m_1 < m_2$), לכן קיים $m_2 < m_3$ כך ש - $a_{m_2} < a_{m_3}$.

   נמשיך באותו אופן: $\cdots < a_{m_3} < a_{m_2} < a_{m_1}$, $(m_1 < m_2 < m_3 < \cdots)$

   קיבלנו תת סדרה עולה a_{m_n}.

   a_n חסומה, לכן: a_{m_n} חסומה.

   לכן: a_{m_n} עולה וחסומה, ועפ"י משפט מתכנסת.

לכן, בכל מקרה ל - a_n יש תת סדרה מתכנסת.

■

9. **סדרה a_n מתכנסת במובן הרחב ו - $\lim a_n = a \Leftrightarrow \text{limsup}a_n = \text{liminf}a_n = a$.**

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח: $\lim a_n = a$. לכן, כל תת סדרה של a_n שואפת ל a (הוכחה דומה להוכחת משפט 3 – נניח בשלילה כי קיימת תת סדרה a_{m_n} כך ש - $\lim a_{m_n} = a'$. עבור ε קטן מספיק, הסביבות $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ו - $(a'-\varepsilon, a'+\varepsilon)$ זרות, ונקבל סתירה).

לכן: $\text{limsup}a_n = \text{liminf}a_n = a$.

$\boxed{\Rightarrow}$

נניח: $\text{limsup}a_n = \text{liminf}a_n = a$. נוכיח: $\lim a_n = a$.

- אם $a \in \mathbb{R}$.

  נוכיח כי לכל $0 < \varepsilon$, לבסוף $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

נניח בשלילה כי קיימים אינסוף ערכי $n \in \mathbb{N}$ כך ש - $a_n \le a - \varepsilon$.

תהי b_n תת הסדרה המורכבת מערכים אלו.

עפ״י משפט, ל - b_n קיימת תת סדרה מתכנסת c_n.

לכן: $c_n \le a - \varepsilon$, $c \leftarrow c_n$, לכן עפ״י משפט: $c \le a - \varepsilon < a = \text{liminf} a_n$.

אולם, c_n בפרט תת סדרה של a_n, לכן: $c \ge \text{liminf} a_n$. סתירה.

באופן דומה, לא יתכן כי קיימים אינסוף ערכי $n \in \mathbb{N}$ כך ש - $a + \varepsilon \le a_n$.

- אם $a = \infty$.

באופן דומה נוכיח כי לכל $M \in \mathbb{R}$, לבסוף $a_n \in (M, \infty)$.

- אם $a = -\infty$.

הוכחה דומה למקרה $a = \infty$.

לכן, לכל $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: $\lim a_n = a$.

■

10. <u>התכנסות טור תלויה בזנב</u>: התכונות הבאות שקולות:

1. **הטור מתכנס.**
2. **כל זנב של הטור מתכנס.**
3. **קיים לטור זנב שמתכנס.**

הוכחה

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור.

$\boxed{2 \Leftarrow 1}$

נניח כי הטור מתכנס.

נסמן: $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

יהי $m \in \mathbb{N}$. נוכיח כי r_m מתכנס.

הסדרה $(s_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ מתקבלת מהסדרה $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ע״י מחיקת מספר סופי של איברים,

לכן: $s_{m+n} \to s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

לכל $n \in \mathbb{N}$: $s_{m+n} = s_m + \overbrace{(a_{m+1} + \cdots + a_{m+n})}^{=s_n'}$.

לכן: $s_n' = s_{m+n} - s_m \to s - s_m \in \mathbb{R}$.

לכן: $r_m = s - s_m$, ולכן מתכנס.

$\boxed{3 \Leftarrow 2}$

נניח כי כל זנב של הטור מתכנס. בפרט, קיים לטור זנב שמתכנס.

$\boxed{1 \Leftarrow 3}$

נניח כי קיים לטור זנב שמתכנס, נסמנו r_m.

מהוכחת המעבר הראשון: $s_{m+n}=s_m+s_n{}'$, לכן: $s_{m+n}\to s_m+r_m$.

הסדרה $(s_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ מתקבלת מהסדרה $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ע״י מחיקת מספר סופי של איברים,

לכן: $s_n\to s_m+r_m$.

■

11. <u>מבחן ההשוואה הגבולי</u>: יהיו $\sum b_n, \sum a_n$ טורים חיוביים. אם הגבול $\frac{a_n}{b_n}\to c$ קיים וכן $0<c<\infty$, אזי הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד.

הוכחה

<u>טענה</u>: אם קיימים קבועים $0<c',c''$ כך שלבסוף $c'<\frac{a_n}{b_n}<c''$, אז הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד.

הוכחה

לבסוף $a_n<c''\cdot b_n$.

אם $\sum b_n<\infty$, אזי עפ״י משפט: $\sum c''\cdot b_n=c''\cdot\sum b_n<\infty$.

עפ״י מבחן ההשוואה: $\sum a_n<\infty$.

לבסוף $c'\cdot b_n<a_n$.

אם $\sum a_n<\infty$, אזי עפ״י מבחן ההשוואה $c'\cdot\sum b_n=\sum c'\cdot b_n<\infty$.

עפ״י משפט: $\sum b_n<\infty$.

ניקח $\varepsilon>0$ כך ש - $0<c-\varepsilon$ (למשל: $\varepsilon=\frac{c}{2}$).

$\frac{a_n}{b_n}\to c$, לכן לבסוף $0<c-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<c+\varepsilon$.

עפ״י הטענה (עם: $c'=c-\varepsilon\,,c''=c+\varepsilon$): $\sum a_n,\sum b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

■

12. <u>מבחן השורש (קושי)</u>: יהי $\sum a_n$ טור חיובי.

1. אם קיים $0<q<1$ כך שלבסוף $\sqrt[n]{a_n}<q$, אז $\sum a_n$ מתכנס.
2. אם $\sqrt[n]{a_n}\to c<1$, אז $\sum a_n$ מתכנס.
3. אם לבסוף $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$, אז $\sum a_n$ מתבדר.

הוכחה

1. לבסוף $\sqrt[n]{a_n}<q$, לכן $a_n<q^n$.

$\sum q^n$ טור הנדסי ו - $0<q<1$, לכן: $\sum q^n$ מתכנס.

עפ"י מבחן ההשוואה: $\sum a^n$ מתכנס.

2. $\sqrt[n]{a_n} \to c < 1$.

ניקח $\varepsilon > 0$ כך ש - $c + \varepsilon < 1$ (למשל: $\varepsilon = \frac{1-c}{2}$).

לבסוף $\sqrt[n]{a_n} < c + \varepsilon < 1$, ועפ"י סעיף (1) נקבל את הדרוש.

3. לבסוף $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, לכן לבסוף $a_n \geq 1$.

לכן: $a_n \nrightarrow 0$, ועפ"י משפט $\sum a_n$ מתבדר.

■

13. <u>מבחן העיבוי</u>: אם הסדרה a_n חיובית ויורדת, אז הטורים $\sum a_n$, $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

הוכחה

נניח כי $\sum a_n$ מתכנס, ונוכיח כי $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס.

הסדרה a_n יורדת, לכן:

$$a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \cdots \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots$$

$\sum a_n$ טור חיובי, לכן עפ"י חוק הקיבוץ:

$$a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \cdots \leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \cdots$$

$\sum a_n$ מתכנס, לכן הטור: $a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \cdots$ מתכנס.

$$a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \cdots = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + 8 \cdot a_8 + \cdots) = \frac{1}{2} \cdot \sum 2^n \cdot a_{2^n}$$

לכן, $\frac{1}{2} \cdot \sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס, לכן: $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס.

נניח כי נניח כי $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס, ונוכיח כי $\sum a_n$ מתכנס.

הסדרה a_n יורדת, לכן:

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots \leq a_1 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + \cdots$$

$\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס, לכן $a_1 + \sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס.

עפ"י מבחן ההשוואה הטור: $a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots$ מתכנס.

$\sum a_n$ טור חיובי, לכן עפ"י חוק הקיבוץ $\sum a_n$ מתכנס.

לכן: הטורים $\sum a_n$, $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

■

14. <u>מבחן לייבניץ</u>: אם a_n סדרה יורדת ושואפת ל – 0, אז:

1. הטור $\sum (-1)^{n+1} \cdot a_n$ מתכנס.
2. שאריות הטור מקיימות $|r_m| < a_{m+1}$ וסימנן $(-1)^m$.

3. עבור m זוגי: $s_m \leq s \leq s_{m+1}$, ועבור m אי זוגי: $s_m \geq s \geq s_{m+1}$.

הוכחה

1. נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים s_{2n} של הטור $\sum(-1)^{n+1} \cdot a_n$.
הסדרה a_n יורדת, לכן:
$$s_{2n} = (a_1 - a_2)_{\geq 0} + (a_3 - a_4)_{\geq 0} + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})_{\geq 0} \geq 0$$
$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3)_{\geq 0} - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1})_{\geq 0} - a_{2n_{\geq 0}} \leq a_1$$
לכן: s_{2n} סדרה עולה וחסומה, לכן עפ"י משפט מתכנסת, נסמן: $s_{2n} \to s$.
מתקיים: $s_{2n-1} = s_{2n} - a_{2n}$, לכן: $s_{2n-1} \to s - 0 = s$.
לכן: $s_{2n-1}, s_{2n} \to s$. $\{2 \cdot n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 \cdot n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$, לכן: $s_n \to s$.
אזי, הטור: $\sum(-1)^{n+1} \cdot a_n$ מתכנס.
2. עפ"י סעיף (1): $0 \leq s_{2n} \leq a_1$, לכן: $0 \leq s \leq a_1$, ועובדה זו נכונה לכל טור כבניסוח המשפט, בפרט עבור זנב הטור r_m עבור m זוגי. לכן: $0 \leq r_m \leq a_{m+1}$ עבור m זוגי.
עבור m אי זוגי, הטור $-r_m$ מקיים את סעיף (1), לכן: $0 \leq -r_m \leq a_{m+1}$.
לכן: שאריות הטור מקיימות $|r_m| < a_{m+1}$ וסימנן $(-1)^m$.
3. עבור m זוגי: עפ"י סעיף (2): $\overbrace{s_m + a_{m+1}}^{=s_{m+1}} \geq \overbrace{s_m + r_m}^{=s} \geq s_m$, לכן:
$$s_m \leq s \leq s_{m+1}$$
עבור m אי זוגי באופן דומה.

■

15. <u>קריטריון קושי להתכנסות סדרות</u>: סדרה a_n מתכנסת $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח $a_n \to a$.
יהי $0 < \varepsilon$.
$a_n \to a$, לכן, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \varepsilon$.
לכל $N < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| < |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כדרוש.

$\boxed{\Longrightarrow}$

נניח כי לכל $0 < \varepsilon$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

טענה: a_n חסומה.

הוכחה

עפ"י ההנחה, בפרט עבור $\varepsilon = 1$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_n - a_m| < 1$. בפרט, עבור $m = N + 1$, לכל $N < n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n| - |a_{N+1}| \leq |a_n - a_{N+1}| < 1$$

לכן, לכל $N < n \in \mathbb{N}$: $|a_n| < |a_{N+1}| + 1$.

נגדיר: $M = \max\{|a_1|, \cdots, |a_N|, |a_{N+1}| + 1\}$.

עפ"י הגדרת M, לכל $n \in \mathbb{N}$: $|a_n| < M$, לכן a_n חסומה.

עפ"י משפט בולצאנו ויירשטרס, ל - a_n קיימת תת סדרה מתכנסת $a_{m_n} \to a$.

נוכיח $a_n \to a$.

יהי $0 < \varepsilon$.

$a_{m_n} \to a$, לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_1 < n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $\left|a_{m_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

עפ"י ההנחה, קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_2 < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

נגדיר $N = \max\{N_1, N_2\}$.

לכל $N < n \in \mathbb{N}$ $(n < m_n)$:

$$|a_n - a| = \left|(a_n - a_{m_n}) + (a_{m_n} - a)\right| \leq \left|a_n - a_{m_n}\right| + \left|a_{m_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

לכן: $a_n \to a$, ובפרט מתכנסת, כדרוש.

■

16. <u>מבחן דיריכלה</u>: אם a_n מונוטונית שואפת ל 0 – ו $\sum b_n$ טור חסום, אזי $\sum a_n \cdot b_n$ מתכנס.

הוכחה

מספיק להוכיח עבור $a_n \searrow 0$. הרי, אם $a_n \nearrow 0$, הסדרה $-a_n \searrow 0$, ואז $\sum(-a_n) \cdot b_n$ מתכנס. עפ"י משפט: $\sum(-a_n) \cdot b_n = -\sum a_n \cdot b_n$, לכן $\sum a_n \cdot b_n$ מתכנס.

תהי אפוא $a_n \searrow 0$.

נוכיח בעזרת קריטריון קושי להתכנסות טורים.

נסמן את סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum b_n$ ב - s_n.

יהי $0 < \varepsilon$.

יהיו $m < n \in \mathbb{N}$.

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} \cdot b_{m+1} + \cdots + a_n \cdot b_n|$$

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} \cdot (s_{m+1} - s_m) + \cdots + a_n \cdot (s_n - s_{n-1})|$$

$$|s_n - s_m| = |-a_{m+1} \cdot s_m + (a_{m+1} - a_{m+2}) \cdot s_{m+1} + \cdots + (a_{n-1} - a_n) \cdot s_{n-1} + a_n \cdot s_n|$$

עפ"י אי שוויון המשולש:

$$|s_n - s_m| \le |a_{m+1}| \cdot |s_m| + |a_{m+1} - a_{m+2}| \cdot |s_{m+1}| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| \cdot |s_{n-1}| + |a_n| \cdot |s_n|$$

$\sum b_n$ חסום, לכן קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|s_k| < M$. לכן:

$$|s_n - s_m| < |a_{m+1}| \cdot M + |a_{m+1} - a_{m+2}| \cdot M + \cdots + |a_{n-1} - a_n| \cdot M + |a_n| \cdot M$$

$$|s_n - s_m| < (|a_{m+1}| + |a_{m+1} - a_{m+2}| + \cdots |a_{n-1} - a_n| + |a_n|) \cdot M$$

a_n מונוטונית יורדת שואפת ל -0, לכן:

$$|s_n - s_m| < (a_{m+1} + a_{m+1} - a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} - a_n + a_n) \cdot M$$

$$|s_n - s_m| < 2 \cdot a_{m+1} \cdot M$$

$a_n \to 0$, לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < m + 1 \in \mathbb{N}$ מתקיים: $a_{m+1} < \frac{\varepsilon}{2 \cdot M}$.

לכל $N < m < n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|s_n - s_m| < 2 \cdot M \cdot a_{m+1} < 2 \cdot M \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot M} = \varepsilon$.

לכן: $\sum a_n \cdot b_n$ מתכנס.

17. אם טור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אזי שינוי סדר איבריו לא ישנה את סכומו.

הוכחה

<u>טענה</u>: אם טור אי שלילי $\sum a_n$ מתכנס, אזי לכל תמורה $P(n)$ מתקיים: $\sum a_{P(n)} = \sum a_n$.

הוכחה

נסמן את סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum a_n$ ב - s_n ואת סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum a_{P(n)}$ ב - s^P.

$$s_n^P = a_{P(1)} + \cdots + a_{P(n)} \le a_1 + \cdots + a_{\max\{a_{P(1)},\cdots,a_{P(n)}\}} \le s$$

$\sum a_n$ מתכנס, לכן $\sum a_{P(n)}$ מתכנס ומתקיים: $s_P \le s$.

הנ"ל נכון לכל טור אי שלילי מתכנס $\sum a_n$ ולכל תמורה $P(n)$, לכן בפרט עבור הטור האי שלילי $\sum a_{P(n)}$ והתמורה $P^{-1}(n)$. לכן:

$$s = \sum a_{P^{-1}(P(n))} \le \sum a_{P(n)} = s^P$$

לכן: $s^P \le s \le s^P$, אזי: $s^P = s$.

$\sum a_n$ מתכנס בהחלט, לכן $\sum |a_n|$ מתכנס, לכן עפ"י הטענה $\sum |a_{P(n)}|$ מתכנס ו - $\sum |a_{P(n)}| = \sum |a_n|$.

$\sum\left|a_{P(n)}\right|$ מתכנס, לכן $\sum a_{P(n)}$ מתכנס בהחלט.

$\sum a_n$ מתכנס בהחלט, לכן עפ״י משפט $\sum p_n, \sum q_n$ מתכנסים ו - $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$ עבור הטורים האי שליליים $\sum p_n, \sum q_n$ המתאימים.

$\sum a_{P(n)}$ מתכנס בהחלט, לכן עפ״י משפט $\sum p_{P(n)}, \sum q_{P(n)}$ מתכנסים ו $-$ $\sum a_{P(n)} = \sum p_{P(n)} - \sum q_{P(n)}$ עבור הטורים האי שליליים $\sum p_{P(n)}, \sum q_{P(n)}$ המתאימים.

$\sum p_{P(n)}, \sum q_{P(n)}$ מתכנסים, לכן עפ״י הטענה $\sum q_{P(n)} = \sum q_n$, $\sum p_{P(n)} = \sum p_n$. לכן:

$$\sum a_{P(n)} = \sum p_{P(n)} - \sum q_{P(n)} = \sum p_n - \sum q_n = \sum a_n$$

לכן: $\sum a_{P(n)} = \sum a_n$.

■

18. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

הוכחה

נתבונן במעגל היחידה.

עבור: $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

עפ״י השוואת שטחי המשולש החסום בגזרה, הגזרה והמשולש החוסם את הגזרה:

$$\frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{2} < \pi\cdot 1^2\cdot\frac{x}{2\cdot\pi} < \frac{\tan(x)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(x)\cdot\cos(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$1 \xleftarrow[x\to 0^+]{} \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$

עפ״י משפט הסנדוויץ': $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.

עבור $-\frac{\pi}{2} < x < 0$:

$0 < x < \frac{\pi}{2}$, לכן:

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < \frac{1}{\cos(-x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}$$

ועפ״י משפט הסנדוויץ': $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.

עפ"י משפט: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.

■

19. <u>תכונות שקולות לרציפות f בנקודה a</u>:

1. **לכל $0<\varepsilon$, קיים $0<\delta$ כך לשכל $x\in domf$ המקיים: $|x-a|<\delta$: $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.**
2. **$\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$.**
3. **לכל סדרה $a_n\to a$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, $a_n\in domf$, מתקיים: $f(a_n)\to f(a)$.**

הוכחה

1. $\boxed{\Leftarrow}$

נניח $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

לכן, לכל $0<\varepsilon$, קיים $0<\delta$ כך שלכל $x\in domf$ המקיים: $0<|x-a|<\delta$,
מתקיים: $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

אם $x=a$, אז: $f(x)=f(a)$, לכן: $|f(x)-f(a)|=0<\varepsilon$.

לכן, התנאי מתקיים לכל $x\in domf$ המקיים: $|x-a|<\delta$.

$\boxed{\Rightarrow}$

נניח שלכל $0<\varepsilon$, קיים $0<\delta$ כך לשכל $x\in domf$ המקיים: $|x-a|<\delta$:
$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

בפרט, לכל $0<\varepsilon$, קיים $0<\delta$ כך לשכל $x\in domf$ המקיים: $0<|x-a|<\delta$:
$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

לכן: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

2. $\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a) \underset{h:=x-a}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, הרי $h\to 0 \Leftrightarrow x\to a$.

3. $\boxed{\Leftarrow}$

נניח $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

תהי $a_n\to a$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$: $a_n\in domf$ ו- $f(a_n)\to f(a)$.

נסמן: $I=\{n\in\mathbb{N}: a_n=a\}$, $J=\{n\in\mathbb{N}: a_n\neq a\}$.

- אם I סופית.

לבסוף $a_n\neq a$. תהי b_n הסדרה המורכבת מאיברי a_n כך ש- $n\in J$.

b_n מקיימת את הגדרת הגבול לפי היינה, לכן עפ"י ההנחה: $f(b_n)\to f(a)$.

מכיוון שמספר סופי של איברים לא משפיע על התכנסות הסדרה: $f(a_n)\to f(a)$.

- אם J סופית.

לבסוף $a_n = a$. תהי c_n הסדרה המורכבת מאיברי a_n כך ש - $n \in I$.

$f(b_n) = f(a) \to f(a)$ כסדרה קבועה.

מכיוון שמספר סופי של איברים לא משפיע על התכנסות הסדרה : $f(a_n) \to f(a)$.

- אם I, J אינסופיות.

תהי b_n הסדרה המורכבת מאיברי a_n כך ש - $n \in J$.

תהי c_n הסדרה המורכבת מאיברי a_n כך ש - $n \in I$.

עפ"י אותם הנימוקים : $f(b_n) \to f(a)$ ו - $f(c_n) \to f(a)$.

משום ש - $I \cup J = \mathbb{N}$: $f(a_n) \to f(a)$.

לכן, בכל מקרה $f(a_n) \to f(a)$, כדרוש.

$\boxed{\Rightarrow}$

4. נניח כי לכל סדרה $a_n \to a$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in domf$, מתקיים : $f(a_n) \to f(a)$.

בפרט, לכל סדרה $a_n \to a$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $a \neq a_n \in domf$, מתקיים : $f(a_n) \to f(a)$.

עפ"י הגדרת הגבול לפי היינה : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

■

20. אם f רציפה ב – a ו – g רציפה ב - $b \coloneqq f(a)$, אז $g \circ f$ רציפה ב - a.

הוכחה

נשתמש בניסוח השקול (1) ממשפט 19.

יהי $0 < \varepsilon$.

g רציפה ב – b, לכן קיים $0 < \delta_1$ כך שלכל $|y - b| < \delta_1$: $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$.

f רציפה ב - a, לכן קיים $0 < \delta_2$ כך שלכל $|x - a| < \delta_2$: $|f(x) - f(a)| < \delta_1$.

לכן, לכל $|x - a| < \delta_2$: $\left|\overbrace{f(x)}^{=y} - \overbrace{f(a)}^{=b}\right| < \delta_2$, לכן : $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$.

■

21. <u>משפט ערך הביניים</u>: אם f רציפה בקטע $[a,b]$ ו - $f(a) < f(b)$, לכל $f(a) < d < f(b)$ קיים $a < c < b$ כך ש - $f(c) = d$.

משפט דומה עבור $f(a) > f(b)$.

הוכחה

יהי $f(a) < d < f(b)$.

נגדיר: $A = \{x \in [a,b] : f(x) \leq d\}$.

$f(a) < d$, לכן: $a \in A$, לכן $A \neq \phi$.

$\forall x \in A : x \leq b$, לכן: A חסומה מלעיל.

עפ"י אקסיומת החסם העליון, $c \coloneqq supA$ קיים.

- $a < c$.

  f רציפה מימין ב - a, לכן: $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

  תהי $x_n \searrow a$.

  עפ"י הגדרת הגבול לפי היינה, $f(x_n) \to f(a)$. $f(a) < d$, לכן לבסוף: $f(x_n) < d$, ז"א: $x_n \in A$.

  לכן, לבסוף: $a < x_n \leq c$, לכן: $a < c$.

- $c < b$.

  נניח בשלילה כי $c = b$.

  תהי $A \ni x_n \to c$.

  f רציפה משמאל ב - c, לכן $f(x_n) \to f(c)$, והרי $f(b) = f(c)$ וכן - $d < f(b)$, לכן: $f(x_n) \to f(c) > d$. לכן, לבסוף: $d < f(x_n)$, בסתירה לכך ש - $x_n \in A$.

  לכן: $c < b$.

- $f(c) = d$.

  נניח בשלילה ש - $f(c) < d$.

  תהי $x_n \searrow c$, לכן: $f(x_n) \to f(c) < d$, לכן לבסוף $f(x_n) < d$, ז"א: $x_n \in A$.

  לכן, לבסוף: $c < x_n \leq c$. סתירה.

  נניח בשלילה ש - $d < f(c)$.

  תהי $A \ni x_n \to c$, לכן $f(x_n) \to f(c) > d$, לכן לבסוף: $d < f(x_n)$, בסתירה לכך ש - $x_n \in A$.

לכן: $f(c) = d$, כדרוש.

■

22. <u>למת ויירשטרס</u>: פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, חסומה שם.

הוכחה

נוכיח עבור פונקציה חסומה מלעיל (עבור חסומה מלרע באופן דומה)

נניח בשלילה כי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אך אינה חסומה מלעיל שם.

לכן, בפרט כל $n \in \mathbb{N}$ אינו חסם מלעיל של f בקטע, לכן קיים $a \le x_n \le b$ כך ש - $n < f(x_n)$.

x_n חסומה (מלרע ע"י a, מלעיל ע"י b), לכן עפ"י משפט ויירשטרס קיימת לה תת סדרה מתכנסת $c_n \to c$. לכל $n \in \mathbb{N}$: $a \le c_n \le b$, לכן: $a \le c \le b$.

$n < f(x_n)$, $\infty \leftarrow n$, לכן $f(x_n) \to \infty$. $f(c_n)$ תת סדרה של $f(x_n)$, לכן: $f(c_n) \to \infty$.

f רציפה בקטע $[a,b]$, לכן בפרט ב - c, לכן: $f(c_n) \to f(c) \in \mathbb{R}$.

$$\overbrace{f(c)}^{\in\mathbb{R}} \leftarrow f(c_n) \to \overbrace{\infty}^{\notin\mathbb{R}}$$

סתירה.

לכן: f חסומה בקטע $[a,b]$, כדרוש.

■

23. <u>משפט ויירשטרס</u>: פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, מקבלת מקסימום ומינימום שם.

הוכחה

נגדיר $A = \{f(x) : a \le x \le b\}$.

$A \neq \phi$, וחסומה עפ"י למת ויירשטרס.

עפ"י אקסיומת החסם העליון $s = supA$ קיים.

תהי $A \ni f(x_n) \to s$.

לכל $n \in \mathbb{N}$: $a \le x_n \le b$, לכן x_n חסומה. עפ"י משפט ויירשטרס, קיימת לה תת סדרה מתכנסת $c_n \to c$. לכל $n \in \mathbb{N}$: $a \le c_n \le b$, לכן: $a \le c \le b$.

$f(c_n)$ תת סדרה של $f(x_n)$, לכן: $f(c_n) \to s$.

f רציפה ב - c, לכן: $f(c_n) \to f(c)$.

$$f(c) \leftarrow f(c_n) \to s$$

ומיחידות הגבול: $s = f(c) \in A$, לכן: $s = maxA$, ובפרט $maxA$ קיים.

באופן דומה, $minA$ קיים.

■

24. <u>משפט קנטור</u>: פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, רציפה במידה שווה שם.

הוכחה

נניח בשלילה כי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, אך אינה רציפה במידה שווה שם.

עפ"י משפט, קיימות שתי סדרות $x_n, y_n \in [a,b]$ כך ש - $x_n - y_n \to 0$, אולם: $f(x_n) - f(y_n) \nrightarrow 0$.

יהי $\varepsilon > 0$ כך ש - $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ עבור אינסוף ערכי n.

ע״י מעבר לתתי הסדרות הנקבעות ע״י ערכים אלו (שמקיימות גם הן את השלילה), ניתן להניח $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

לכל $n \in \mathbb{N}$: $a \leq x_n \leq b$, לכן x_n חסומה. עפ״י משפט ויירשטרס קיימת לה תת סדרה מתכנסת $x_{m_n} \to c$.

$x_{m_n} - y_{m_n} \to 0$ כתת סדרה של $x_n - y_n$, לכן (עפ״י אריתמטיקה של גבולות): $y_{m_n} \to c$.

לכל $n \in \mathbb{N}$: $a \leq x_{m_n} \leq b$, לכן: $a \leq c \leq b$.

מרציפות f ב c –: $f(x_{m_n}) \to f(c)$ ו - $f(y_{m_n}) \to f(c)$.

לכן (עפ״י אריתמטיקה של גבולות): $f(x_{m_n}) - f(y_{m_n}) \to 0$, לכן, בפרט עבור $\varepsilon > 0$,

לבסוף: $|f(x_{m_n}) - f(y_{m_n})| < \varepsilon$, לכן בפרט: $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$ עבור אינסוף ערכי $n \in \mathbb{N}$. סתירה.

לכן: f רציפה במידה שווה בקטע $[a, b]$, כדרוש.

■

25. <u>כלל השרשרת</u>: $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

הוכחה

$$\left(f(g(x))\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

נכפול ונחלק ב - $g(x+h) - g(x)$:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f\left(\overbrace{g(x+h)}^{:=a}\right) - f(g(x))}{\underbrace{g(x+h)}_{:=a} - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

כדי להימנע ממכנס 0, נגדיר פונקציה:

$$D(h) = \begin{cases} \dfrac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} & , \quad g(x+h) \neq g(x) \\ f'(g(x)) & , \quad g(x+h) = g(x) \end{cases}$$

עפ״י הגדרת $D(h)$, לכל h:

$$(*) \qquad \overbrace{\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}}^{\to (f(g(x)))'} = D(h) \cdot \overbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}^{\to g'(x)}$$

נוכיח כי $D(h) \xrightarrow[h\to 0]{} f'\big(g(x)\big)$, ואז, נפעיל גבול על שני אגפי השוויון ונקבל את הדרוש.

נעבוד בלשון הסדרות.

תהי $h_n \to 0$.

לסדרה שתי תתי סדרות:

1. האיברים h_n כך ש - $g(x+h_n) \neq g(x)$.
2. האיברים h_n כך ש - $g(x+h_n) = g(x)$.

אם אחת מתתי הסדרות סופית, היא אינה משפיעה על גבול הסדרה h_n, לכן ניתן להניח כי אנו תמיד באותו מקרה.

1. אם $g(x+h_n) \neq g(x)$.

   עפ"י הגדרת $D(h)$: $D(h) = \frac{f(g(x+h_n))-f(g(x))}{g(x+h_n)-g(x)}$.

   $h_n \to 0$, לכן מרציפות g ב - x: $g(x) \neq g(x+h_n) \to g(x)$.

   לכן:

$$D(h) = \frac{f\big(g(x+h_n)\big)-f\big(g(x)\big)}{g(x+h_n)-g(x)} \to \lim_{a\to g(x)} \frac{f(a)-f\big(g(x)\big)}{a-g(x)} = f'\big(g(x)\big)$$

2. אם $g(x+h_n) = g(x)$.

   עפ"י הגדרת $D(h)$: $D(h) = f'\big(g(x)\big)$.

   לכן: $D(h) \to f'\big(g(x)\big)$, כסדרה קבועה.

אם שתי הסדרות אינסופיות, נראה באופן דומה כי הטענה נכונה עבור כל אחת מתתי הסדרות, ומשום ששתיהן מכסות את כל הסדרה, עפ"י משפט: $D(h_n) \to f'\big(g(x)\big)$.

לכן: $D(h) \xrightarrow[h\to 0]{} f'\big(g(x)\big)$. מהפעלת גבול על שני אגפי השוויון (*), נקבל:

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

■

26. <u>משפט רול</u>: תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). אם $f(a)=f(b)$, קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש - $f'(c)=0$.

הוכחה

f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, לכן עפ"י משפט ויירשטרס מקבלת מקסימום ומינימום שם.

- אם $\min f = \max f$.

f פונקציה קבועה בקטע $[a,b]$. לכן, לכל $a<c<b$: $f'(c)=0$, כנגזרת של פונקציה קבועה.

- אם $\min f \neq \max f$.

$f(a)=f(b)$, לכן לא ייתכן כי $a=\min f$ ו- $b=\max f$ (או ההיפך).

תהי אפוא $a<c<b$ נקודת אקסטרמום.

עפ״י משפט פרמה: $f'(c)=0$, כדרוש.

■

27. <u>משפט הערך הממוצע (לגרנז׳)</u>: תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש - $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הוכחה

משוואת הישר העובר בנקודות $\left(a,f(a)\right)$ ו - $\left(b,f(b)\right)$:

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)+f(a)$$

y פולינום, לכן רציף וגזיר בכל $\mathbb{R}$. f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), לכן $\tilde{f}$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), כסכום של פונקציות רציפות וגזירות בקטעים המתאימים.

נגדיר פונקציה: $\tilde{f}=f-y$. עפ״י הגדרת $\tilde{f}$, לכל $x\in[a,b]$:

$$\tilde{f}(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)+f(a)$$

$$\Downarrow$$

$$f(a)=f(b)=0$$

עפ״י משפט רול, קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש - $\tilde{f}'(c)=0$.

עפ״י הגדרת $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}'(c)=(f-y)'(c)=f'(c)-y'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

כדרוש.

■

28. <u>משפט לופיטל</u>: יהיו $\lambda \in \{0, \infty\}$ ו - $-\infty \leq a, b \leq \infty$. יהיו f, g רציפות בסביבה מנוקבת של a ומקיימות שם:

1. $g'(x) \neq 0$.
2. $f(x), g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda$.
3. $\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ במובן הרחב.

אז: $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$.

המשפט נכון גם עבור סביבה חד צדדית של a וגבולות חד צדדיים מתאימים.

הוכחה

ראה הרצאה 24.

■