

רשימת הוכחות

1. אם יש לקבוצה חסם תחתון, אז הוא יחיד, ויסומן $\inf A$.

הוכחה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

נניח כי b, c חסמים תחתונים של A .

b בפרט חסם מלרע של A , לכן c חסם תחתון: $c \leq b$.

c בפרט חסם מלרע של A , לכן b חסם תחתון: $b \leq c$.

לכן: $b = c$.

לכן $\inf A$ יחיד.

■

2. צפיפות \mathbb{Q} ב- \mathbb{R} : בין כל שני מספרים ממשיים, יש מספר רציונאלי.

הוכחה

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, כך ש- $a < b$.

$0 < b - a$, לכן עפ"י תכונת ארכימדס, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $1 < n \cdot (b - a)$.

הקבוצה $\phi = \{m \in \mathbb{Z} : m < n \cdot b\} \subseteq \mathbb{Z}$ חסומה מלעיל (למשל ע"י $n \cdot b$), לכן עפ"י למה (לכל קבוצה $A \subseteq \mathbb{Z}$ קיים מקסימום), $k := \max\{m \in \mathbb{Z} : m < n \cdot b\}$ קיים.

אם: $k \leq n \cdot a$ אז: $k + 1 \leq n \cdot a + 1 < n \cdot b$, בסתירה למקסימאליות של k .

לכן: $n \cdot a < k < n \cdot b$, ז"א: $n \cdot a < k < n \cdot b$, לכן: $a < \frac{k}{n} < b$, כדרוש.

■

3. יחידות הגבול: אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, אז $a = b$.

הוכחה

נניח בלי הגבלת הכלליות: $a < b$.

יהי $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$.

• $|b - a| > 2 \cdot \varepsilon$: לכן, $a + \varepsilon < a + \frac{b-a}{2} = b - \frac{b-a}{2} < b - \varepsilon$

• $|a_n - a| < \varepsilon$: $N_1 < n \in \mathbb{N}$ שלכל $N_1 \in \mathbb{N}$, לכן קיים $a_n \rightarrow a$

בנוסף: $a_n \rightarrow b$: לכן קיים $N_2 < n \in \mathbb{N}$ שלכל $N_2 \in \mathbb{N}$, $|a_n - b| < \varepsilon$.

לכן, עבור $N = \max\{N_1, N_2\}$, מתקיים:

$$|b - a| = |(a_n - a) - (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2 \cdot \varepsilon$$

לכן: $2 \cdot \varepsilon > |b - a| < 2 \cdot \varepsilon$. סתירה.

לכן: $a = b$.

■

4. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, אז: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.

הוכחה

עפ"י למה (סדרה מתכנסת חסומה), קיים $M_1 \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| < M_1$, וקיים

$$M_2 \in \mathbb{R} \text{ כך שלכל } n \in \mathbb{N}, |b_n| < M_2.$$

כעת, נגדיר: $T = \max\{|a|, |b|, M_1, M_2\}$.

אם $T = 0$, אזי לכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0 \rightarrow 0$ ו- $b_n = 0 \rightarrow 0$, לכן:

$$a_n \cdot b_n = 0 \cdot 0 = 0 \rightarrow 0 = a \cdot b$$

לכן: $0 < T$.

יהי $\varepsilon > 0$.

$$a_n \rightarrow a, \text{ לכן קיים } N_1 \in \mathbb{N} \text{ כך שלכל } n \in \mathbb{N}, N_1 < n, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot T}.$$

$$b_n \rightarrow b, \text{ לכן קיים } N_2 \in \mathbb{N} \text{ כך שלכל } n \in \mathbb{N}, N_2 < n, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot T}.$$

נגדיר $N = \max\{N_1, N_2\}$. לכל $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ מתקיים:

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b|$$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leq |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n| + |a \cdot b_n - a \cdot b|$$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|$$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < M_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T} < T \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T} + T \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T}$$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < 2 \cdot T \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T} = \varepsilon$$

לכן: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.

■

5. משפט הסנדוויץ': תהיינה a_n, b_n שתי סדרות המתכנסות לאותו גבול c , ותהי c_n

סדרה שלישית. אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $N < n$, $a_n \leq c_n \leq b_n$, אז:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$.

$a_n \rightarrow c$, לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ $N_1 < n$: $|a_n - c| < \varepsilon$.

$b_n \rightarrow c$, לכן קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ $N_2 < n$: $|b_n - c| < \varepsilon$.

נגדיר : $N' = \max\{N, N_1, N_2\}$. לכל $n \in \mathbb{N}$ $N' < n$ מתקיים :

$$c - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < c + \varepsilon$$

לכן : $|c_n - c| < \varepsilon$, לכן : $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

■

6. כל סדרה עולה וחסומה מתכנסת לסופרמום שלה. כל סדרה יורדת וחסומה מתכנסת לאינפימום שלה.

הוכחה

נוכיח את הטענה הראשונה (הטענה השנייה באופן דומה).

תהי a_n סדרה עולה וחסומה.

עפ"י אקסיומת החסם העליון $sup A$: s קיים.

יהי $\varepsilon > 0$.

עפ"י תכונות של חסם עליון, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $s - \varepsilon < a_N < s$.

לכל $n \in \mathbb{N}$ $N < n$ מתקיים :

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n < s$$

לכן : $0 < s - a_n < \varepsilon$, ז"א : $|a_n - s| < \varepsilon$, לכן a_n מתכנסת ומתקיים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s = sup A$$

■

7. סדרה עולה שאינה חסומה מלעיל שואפת ל- ∞ . סדרה יורדת שאינה חסומה מלרע שואפת ל- $-\infty$.

הוכחה

נוכיח את הטענה הראשונה (הטענה השנייה באופן דומה).

תהי a_n סדרה עולה שאינה חסומה מלעיל.

יהי $M \in \mathbb{R}$.

a_n אינה חסומה מלעיל, לכן M אינו חסם מלעיל, לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $M < a_N$.

a_n עולה לכן, לכל $n \in \mathbb{N}$ $N < n$ מתקיים : $M < a_N \leq a_n$, לכן : $M < a_n$, לכן :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

■

8. משפט בולצאנו וירשטרס: לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.

הוכחה

תהי a_n סדרה.

נאמר שאיבר a_m הוא נקודת שיא, אם לכל $n < m$ מתקיים: $a_m \geq a_n$.
קיימים שני מקרים:

1. יש בסדרה אינסוף נקודות שיא.

נמספר אותן בסדר עולה: $\dots \geq a_{m_3} \geq a_{m_2} \geq a_{m_1}$, $(m_1 < m_2 < m_3 < \dots)$.

קיבלנו תת סדרה יורדת a_{m_n} .

a_n חסומה, לכן a_{m_n} חסומה.

לכן a_{m_n} יורדת וחסומה, ועפ"י משפט מתכנסת.

2. יש בסדרה מספר סופי של נקודות שיא.

נסמן m_1 כך ש- a_{m_1} אינה נקודת שיא, ולכל $n < m_1$: a_n אינה נקודת שיא.

a_{m_1} אינה נקודת שיא, לכן קיים $m_2 < m_1$ כך ש- $a_{m_2} < a_{m_1}$.

a_{m_2} אינה נקודת שיא (הרי $m_1 < m_2$), לכן קיים $m_3 < m_2$ כך ש- $a_{m_3} < a_{m_2}$.

נמשיך באותו אופן: $\dots < a_{m_3} < a_{m_2} < a_{m_1}$, $(m_1 < m_2 < m_3 < \dots)$.

קיבלנו תת סדרה עולה a_{m_n} .

a_n חסומה, לכן a_{m_n} חסומה.

לכן a_{m_n} עולה וחסומה, ועפ"י משפט מתכנסת.

לכן, בכל מקרה ל- a_n יש תת סדרה מתכנסת.

■

9. סדרה a_n מתכנסת במובן הרחב ו- $\lim a_n = a \Leftrightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = a$.

הוכחה

⊆

נניח: $\lim a_n = a$. לכן, כל תת סדרה של a_n שואפת ל- a (הוכחה דומה להוכחת משפט

3 – נניח בשלילה כי קיימת תת סדרה a_{m_n} כך ש- $\lim a_{m_n} = a' \neq a$. עבור ε קטן מספיק,

הסביבות $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ו- $(a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)$ זרות, ונקבל סתירה.

לכן: $\limsup a_n = \liminf a_n = a$.

⊇

נניח: $\limsup a_n = \liminf a_n = a$. נוכיח: $\lim a_n = a$.

• אם $a \in \mathbb{R}$.

נוכיח כי לכל $0 < \varepsilon$, לבסוף $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

- נניח בשלילה כי קיימים אינסוף ערכי $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $a_n \leq a - \varepsilon$.
 תהי b_n תת הסדרה המורכבת מערכים אלו.
 עפ"י משפט, ל- b_n קיימת תת סדרה מתכנסת c_n .
 לכן: $c \leftarrow c_n \leq a - \varepsilon$, לכן עפ"י משפט: $\liminf a_n = a - \varepsilon < a$.
 אולם, c_n בפרט תת סדרה של a_n , לכן: $\liminf a_n \geq c$. סתירה.
 באופן דומה, לא יתכן כי קיימים אינסוף ערכי $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $a + \varepsilon \leq a_n$.
- אם $a = \infty$.
 - באופן דומה נוכיח כי לכל $M \in \mathbb{R}$, לבסוף $a_n \in (M, \infty)$.
 - אם $a = -\infty$.
 - הוכחה דומה למקרה $a = \infty$.
 - לכן, לכל $\lim a_n = a : a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

■

10. התכנסות טור תלויה בזנב: התכונות הבאות שקולות:

1. הטור מתכנס.
2. כל זנב של הטור מתכנס.
3. קיים לטור זנב שמתכנס.

הוכחהיהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור.

$$2 \Leftarrow 1$$

נניח כי הטור מתכנס.

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ נסמן:}$$

יהי $m \in \mathbb{N}$. נוכיח כי r_m מתכנס.הסדרה $(s_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ מתקבלת מהסדרה $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י מחיקת מספר סופי של איברים,

$$s_{m+n} \rightarrow s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ לכן:}$$

$$s_{m+n} = s_m + \overbrace{(a_{m+1} + \dots + a_{m+n})}^{=s'_n} : \text{לכל } n \in \mathbb{N}$$

$$s'_n = s_{m+n} - s_m \rightarrow s - s_m \in \mathbb{R} \text{ לכן:}$$

לכן: $r_m = s - s_m$, ולכן מתכנס.

$$3 \Leftarrow 2$$

נניח כי כל זנב של הטור מתכנס. בפרט, קיים לטור זנב שמתכנס.

$$1 \Leftarrow 3$$

נניח כי קיים לטור זנב שמתכנס, נסמנו r_m .

מהוכחת המעבר הראשון: $s_{m+n} = s_m + s_n'$, לכן: $s_{m+n} \rightarrow s_m + r_m$.

הסדרה $(s_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ מתקבלת מהסדרה $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י מחיקת מספר סופי של איברים,

לכן: $s_n \rightarrow s_m + r_m$.

■

11. מבחן השוואה הגבולי: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים. אם הגבול $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow c$ קיים וכן

$0 < c < \infty$, אזי הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד.

הוכחה

טענה: אם קיימים קבועים c', c'' כך שלבסוף $c' < \frac{a_n}{b_n} < c''$, אז הטורים מתכנסים

ומתבדרים יחד.

הוכחה

לבסוף $a_n < c'' \cdot b_n$.

אם $\sum b_n < \infty$, אזי עפ"י משפט: $\sum c'' \cdot b_n = c'' \cdot \sum b_n < \infty$.

עפ"י מבחן השוואה: $\sum a_n < \infty$.

לבסוף $c' \cdot b_n < a_n$.

אם $\sum a_n < \infty$, אזי עפ"י מבחן השוואה $\sum c' \cdot b_n = \sum a_n < \infty$.

עפ"י משפט: $\sum b_n < \infty$.

ניקח $\varepsilon > 0$ כך ש- $c - \varepsilon < c < c + \varepsilon$ (למשל: $\varepsilon = \frac{c}{2}$).

לכן לבסוף $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow c$, $0 < c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$.

עפ"י הטענה (עם: $c' = c - \varepsilon, c'' = c + \varepsilon$): $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

■

12. מבחן השורש (קושי): יהי $\sum a_n$ טור חיובי.

1. אם קיים $0 < q < 1$ כך שלבסוף $\sqrt[n]{a_n} < q$, אז $\sum a_n$ מתכנס.

2. אם $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow c < 1$, אז $\sum a_n$ מתכנס.

3. אם לבסוף $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, אז $\sum a_n$ מתבדר.

הוכחה

1. לבסוף $\sqrt[n]{a_n} < q$, לכן $a_n < q^n$.

$\sum q^n$ טור הנדסי ו- $0 < q < 1$, לכן: $\sum q^n$ מתכנס.

עפ"י מבחן ההשוואה: $\sum a^n$ מתכנס.

$$2. \quad \sqrt[n]{a_n} \rightarrow c < 1.$$

ניקח $\varepsilon > 0$ כך ש- $c + \varepsilon < 1$ (למשל: $\varepsilon = \frac{1-c}{2}$).

לבסוף $1 > c + \varepsilon > \sqrt[n]{a_n}$, ועפ"י סעיף (1) נקבל את הדרוש.

$$3. \quad \text{לבסוף } \sqrt[n]{a_n} \geq 1, \text{ לכן לבסוף } a_n \geq 1.$$

לכן: $a_n \not\rightarrow 0$, ועפ"י משפט $\sum a_n$ מתבדר.

■

13. מבחן העיבוי: אם הסדרה a_n חיובית ויורדת, אז הטורים $\sum a_n$, $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנסים

ומתבדרים יחד.

הוכחה

נניח כי $\sum a_n$ מתכנס, ונוכיח כי $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס.

הסדרה a_n יורדת, לכן:

$$a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \dots \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots$$

$\sum a_n$ טור חיובי, לכן עפ"י חוק הקיבוץ:

$$a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \dots \leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \dots$$

$\sum a_n$ מתכנס, לכן הטור: $a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \dots$ מתכנס.

$$a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \dots = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + 8 \cdot a_8 + \dots) = \frac{1}{2} \cdot \sum 2^n \cdot a_{2^n}$$

לכן, $\frac{1}{2} \cdot \sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס, לכן: $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס.

נניח כי $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס, ונוכיח כי $\sum a_n$ מתכנס.

הסדרה a_n יורדת, לכן:

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots \leq a_1 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + \dots$$

$\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס, לכן $a_1 + \sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס.

עפ"י מבחן ההשוואה הטור: $a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots$ מתכנס.

$\sum a_n$ טור חיובי, לכן עפ"י חוק הקיבוץ $\sum a_n$ מתכנס.

לכן: הטורים $\sum a_n$, $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

■

14. מבחן לייבניץ: אם סדרה יורדת ושואפת ל-0, אז:

$$1. \quad \text{הטור } \sum (-1)^{n+1} \cdot a_n \text{ מתכנס.}$$

$$2. \quad \text{שאריות הטור מקיימות } |r_m| < a_{m+1} \text{ וסימן } (-1)^m.$$

3. עבור m זוגי: $s_m \leq s \leq s_{m+1}$, ועבור m אי זוגי: $s_m \geq s \geq s_{m+1}$.

הוכחה

1. נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים s_{2n} של הטור $\sum (-1)^{n+1} \cdot a_n$ הסדרה a_n יורדת, לכן:

$$s_{2n} = (a_1 - a_2)_{\geq 0} + (a_3 - a_4)_{\geq 0} + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})_{\geq 0} \geq 0$$

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3)_{\geq 0} - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1})_{\geq 0} - a_{2n} \leq a_1$$

לכן: s_{2n} סדרה עולה וחסומה, לכן עפ"י משפט מתכנסות, נסמן: $s_{2n} \rightarrow s$.

מתקיים: $s_{2n-1} = s_{2n} - a_{2n}$, לכן: $s_{2n-1} \rightarrow s - 0 = s$.

לכן: $s_{2n-1}, s_{2n} \rightarrow s$. $\{2 \cdot n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 \cdot n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. לכן: $s_n \rightarrow s$. אזי, הטור: $\sum (-1)^{n+1} \cdot a_n$ מתכנס.

2. עפ"י סעיף (1): $0 \leq s_{2n} \leq a_1$, לכן: $0 \leq s \leq a_1$, ועובדה זו נכונה לכל טור כבניסוח המשפט, בפרט עבור זנב הטור r_m עבור m זוגי. לכן: $0 \leq r_m \leq a_{m+1}$ עבור m זוגי.

עבור m אי זוגי, הטור $-r_m$ מקיים את סעיף (1), לכן: $0 \leq -r_m \leq a_{m+1}$.

לכן: שאריות הטור מקיימות $|r_m| < a_{m+1}$ וסימן $(-1)^m$.

3. עבור m זוגי: עפ"י סעיף (2): $s_m \leq \overbrace{s_m + r_m}^=s} \leq \overbrace{s_m + a_{m+1}}^{=s_{m+1}}$: לכן:

$$s_m \leq s \leq s_{m+1}$$

עבור m אי זוגי באופן דומה.

■

15. קריטריון קושי להתכנסות סדרות: סדרה a_n מתכנסת \Leftrightarrow לכל $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך

$$|a_n - a_m| < \varepsilon : N < n, m \in \mathbb{N}$$

הוכחה



נניח $a_n \rightarrow a$

יהי $\varepsilon > 0$.

$a_n \rightarrow a$, לכן, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \varepsilon$.

לכל $n, m \in \mathbb{N}$: $N < n, m$ מתקיים:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| < |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כדרוש.



נניח כי לכל $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

טענה: a_n חסומה.

הוכחה

עפ"י ההנחה, בפרט עבור $\varepsilon = 1$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$

מתקיים: $|a_n - a_m| < 1$. בפרט, עבור $m = N + 1$, לכל $N < n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n| - |a_{N+1}| \leq |a_n - a_{N+1}| < 1$$

לכן, לכל $N < n \in \mathbb{N}$: $|a_n| < |a_{N+1}| + 1$.

נגדיר: $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, |a_{N+1}| + 1\}$.

עפ"י הגדרת M , לכל $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| < M$, לכן a_n חסומה.

עפ"י משפט בולצאנו ויירשטרס, ל- a_n קיימת תת סדרה מתכנסת $a_{m_n} \rightarrow a$.

נוכיח $a_n \rightarrow a$.

יהי $\varepsilon > 0$.

$a_{m_n} \rightarrow a$, לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_1 < n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_{m_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

עפ"י ההנחה, קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_2 < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

נגדיר $N = \max\{N_1, N_2\}$.

לכל $N < n \in \mathbb{N}$ ($n < m_n$):

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{m_n}) + (a_{m_n} - a)| \leq |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

לכן: $a_n \rightarrow a$, ובפרט מתכנסת, כדרוש.



16. מבחן דיריכלה: אם a_n מונוטונית שואפת ל-0 ו $\sum b_n$ טור חסום, אזי $\sum a_n \cdot b_n$

מתכנס.

הוכחה

מספיק להוכיח עבור $a_n \searrow 0$. הרי, אם $a_n \nearrow 0$, הסדרה $-a_n \searrow 0$, ואז $\sum (-a_n) \cdot b_n$

מתכנס. עפ"י משפט: $\sum (-a_n) \cdot b_n = -\sum a_n \cdot b_n$, לכן $\sum a_n \cdot b_n$ מתכנס.

תהי אפוא $a_n \searrow 0$.

נוכיח בעזרת קריטריון קושי להתכנסות טורים.

נסמן את סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum b_n$ ב- s_n .

יהי $\varepsilon > 0$.

היו $m < n \in \mathbb{N}$.

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} \cdot b_{m+1} + \dots + a_n \cdot b_n|$$

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} \cdot (s_{m+1} - s_m) + \dots + a_n \cdot (s_n - s_{n-1})|$$

$$|s_n - s_m| = |-a_{m+1} \cdot s_m + (a_{m+1} - a_{m+2}) \cdot s_{m+1} + \dots + (a_{n-1} - a_n) \cdot s_{n-1} + a_n \cdot s_n|$$

עפ"י אי שוויון המשולש:

$$|s_n - s_m| \leq |a_{m+1}| \cdot |s_m| + |a_{m+1} - a_{m+2}| \cdot |s_{m+1}| + \dots + |a_{n-1} - a_n| \cdot |s_{n-1}| + |a_n| \cdot |s_n|$$

$\sum b_n$ חסום, לכן קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|s_k| < M$. לכן:

$$|s_n - s_m| < |a_{m+1}| \cdot M + |a_{m+1} - a_{m+2}| \cdot M + \dots + |a_{n-1} - a_n| \cdot M + |a_n| \cdot M$$

$$|s_n - s_m| < (|a_{m+1}| + |a_{m+1} - a_{m+2}| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n|) \cdot M$$

a_n מונוטונית יורדת שואפת ל-0, לכן:

$$|s_n - s_m| < (a_{m+1} + a_{m+1} - a_{m+2} + \dots + a_{n-1} - a_n + a_n) \cdot M$$

$$|s_n - s_m| < 2 \cdot a_{m+1} \cdot M$$

$a_n \rightarrow 0$, לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < m + 1 \in \mathbb{N}$ מתקיים: $a_{m+1} < \frac{\varepsilon}{2 \cdot M}$.

לכל $N < m < n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|s_n - s_m| < 2 \cdot M \cdot a_{m+1} < 2 \cdot M \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot M} = \varepsilon$.

לכן: $\sum a_n \cdot b_n$ מתכנס.

17. אם טור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אזי שינוי סדר איבריו לא ישנה את סכומו.

הוכחה

טענה: אם טור אי שלילי $\sum a_n$ מתכנס, אזי לכל תמורה $P(n)$ מתקיים: $\sum a_{P(n)} = \sum a_n$.

הוכחה

נסמן את סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum a_n$ ב- s_n ואת סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum a_{P(n)}$ ב- s^P .

$$s_n^P = a_{P(1)} + \dots + a_{P(n)} \leq a_1 + \dots + a_{\max\{a_{P(1)}, \dots, a_{P(n)}\}} \leq s$$

$\sum a_n$ מתכנס, לכן $\sum a_{P(n)}$ מתכנס ומתקיים: $s^P \leq s$.

הנ"ל נכון לכל טור אי שלילי מתכנס $\sum a_n$ ולכל תמורה $P(n)$, לכן בפרט עבור הטור האי שלילי $\sum a_{P(n)}$ והתמורה $P^{-1}(n)$. לכן:

$$s = \sum a_{P^{-1}(P(n))} \leq \sum a_{P(n)} = s^P$$

לכן: $s^P = s$, אזי: $s^P \leq s \leq s^P$.

$\sum a_n$ מתכנס בהחלט, לכן $\sum |a_n|$ מתכנס, לכן עפ"י הטענה $\sum |a_{P(n)}|$ מתכנס ו-

$$\sum |a_{P(n)}| = \sum |a_n|$$

$\sum |a_{P(n)}|$ מתכנס, לכן $\sum a_{P(n)}$ מתכנס בהחלט.
 $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$ - מתכנסים ו- $\sum p_n, \sum q_n$ משפט עפ"י משפט $\sum p_{P(n)}, \sum q_{P(n)}$ מתכנסים ו-
 עבור הטורים האי שליליים $\sum p_n, \sum q_n$ המתאימים.
 $\sum a_{P(n)}$ מתכנס בהחלט, לכן עפ"י משפט $\sum p_{P(n)}, \sum q_{P(n)}$ מתכנסים ו-
 $\sum a_{P(n)} = \sum p_{P(n)} - \sum q_{P(n)}$ עבור הטורים האי שליליים $\sum p_{P(n)}, \sum q_{P(n)}$ המתאימים.
 $\sum p_{P(n)}, \sum q_{P(n)}$ מתכנסים, לכן עפ"י הטענה $\sum p_{P(n)} = \sum p_n, \sum q_{P(n)} = \sum q_n$. לכן:
 $\sum a_{P(n)} = \sum p_{P(n)} - \sum q_{P(n)} = \sum p_n - \sum q_n = \sum a_n$
 לכן: $\sum a_{P(n)} = \sum a_n$

■

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad .18$$

הוכחה

נתבונן במעגל היחידה (לקביעת x ולהמחשה ראה [הרצאה 17](#)).

עבור: $0 < x < \frac{\pi}{2}$

עפ"י השוואת שטחי המשולש החסום בגזרה, הגזרה והמשולש החוסם את הגזרה:

$$\frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{2} < \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{x}{2 \cdot \pi} < \frac{\tan(x)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(x) \cdot \cos(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$1 \xleftarrow{x \rightarrow 0^+} \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$$

עפ"י משפט הסנדוויץ': $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

עבור $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

לכן, $0 < -x < \frac{\pi}{2}$

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < \frac{1}{\cos(-x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}$$

ועפ"י משפט הסנדוויץ': $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$$\text{עפ"י משפט: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

■

19. תכונות שקולות לרציפות f בנקודה a :

1. לכל $0 < \varepsilon$, קיים $0 < \delta$ כך שלכל $x \in \text{dom} f$ המקיים: $|x - a| < \delta$:
 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
2. $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$
3. לכל סדרה $a_n \rightarrow a$ כך שלכל $a_n \in \text{dom} f, n \in \mathbb{N}$, מתקיים: $f(a_n) \rightarrow f(a)$

הוכחה

1. $\boxed{\Leftarrow}$

$$\text{נניח } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

לכן, לכל $0 < \varepsilon$, קיים $0 < \delta$ כך שלכל $x \in \text{dom} f$ המקיים: $0 < |x - a| < \delta$,

$$\text{מתקיים: } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

אם $x = a$, אז: $f(x) = f(a)$, לכן: $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$

לכן, התנאי מתקיים לכל $x \in \text{dom} f$ המקיים: $|x - a| < \delta$

 $\boxed{\Rightarrow}$

נניח שלכל $0 < \varepsilon$, קיים $0 < \delta$ כך שלכל $x \in \text{dom} f$ המקיים: $|x - a| < \delta$:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

בפרט, לכל $0 < \varepsilon$, קיים $0 < \delta$ כך שלכל $x \in \text{dom} f$ המקיים: $0 < |x - a| < \delta$:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$\text{לכן: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$$

3. $\boxed{\Leftarrow}$

$$\text{נניח } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

תהי $a_n \rightarrow a$ כך שלכל $a_n \in \text{dom} f: n \in \mathbb{N}$ ו- $f(a_n) \rightarrow f(a)$

$$\text{נסמן: } I = \{n \in \mathbb{N} : a_n = a\}, J = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq a\}$$

• אם I סופית.

לבסוף $a_n \neq a$. תהי הסדרה המורכבת מאיברי a_n כך ש- $n \in J$

b_n מקיימת את הגדרת הגבול לפי היינה, לכן עפ"י ההנחה: $f(b_n) \rightarrow f(a)$

מכיוון שמספר סופי של איברים לא משפיע על התכנסות הסדרה: $f(a_n) \rightarrow f(a)$

- אם J סופית.
לבסוף $a_n = a$. תהי c_n הסדרה המורכבת מאיברי a_n כך ש- $n \in I$.
 $f(b_n) = f(a) \rightarrow f(a)$ כסדרה קבועה.
מכיוון שמספר סופי של איברים לא משפיע על התכנסות הסדרה: $f(a_n) \rightarrow f(a)$.
- אם I, J אינסופיות.
תהי b_n הסדרה המורכבת מאיברי a_n כך ש- $n \in J$.
תהי c_n הסדרה המורכבת מאיברי a_n כך ש- $n \in I$.
עפ"י אותם הנימוקים: $f(b_n) \rightarrow f(a)$ ו- $f(c_n) \rightarrow f(a)$.
משום ש- $I \cup J = \mathbb{N}$: $f(a_n) \rightarrow f(a)$.
לכן, בכל מקרה $f(a_n) \rightarrow f(a)$, כדרוש.

⇒

נניח כי לכל סדרה $a_n \rightarrow a$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \text{dom} f$, מתקיים: $f(a_n) \rightarrow f(a)$.
בפרט, לכל סדרה $a_n \rightarrow a$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \text{dom} f$, $a \neq a_n$, מתקיים:
 $f(a_n) \rightarrow f(a)$.
עפ"י הגדרת הגבול לפי היינה: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

■

20. אם f רציפה ב- a ו- g רציפה ב- $b := f(a)$, אז $g \circ f$ רציפה ב- a .

הוכחה

נשתמש בניסוח השקול (1) ממשפט 19.

יהי $\varepsilon > 0$.

g רציפה ב- b , לכן קיים $\delta_1 > 0$ כך שלכל $|y - b| < \delta_1$: $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$.

f רציפה ב- a , לכן קיים $\delta_2 > 0$ כך שלכל $|x - a| < \delta_2$: $|f(x) - f(a)| < \delta_1$.

לכן, לכל $|x - a| < \delta_2$: $\left| \overbrace{f(x)}^{=y} - \overbrace{f(a)}^{=b} \right| < \delta_1$. לכן: $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$.

■

21. משפט ערך הביניים: אם f רציפה בקטע $[a, b]$ ו- $f(a) < f(b)$, לכל d כך $f(a) < d < f(b)$.

$f(b) < c < a$ כך ש- $f(c) = d$.

משפט דומה עבור $f(a) > f(b)$.

הוכחה

יהי $f(a) < d < f(b)$.

נגדיר: $A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq d\}$

$f(a) < d$, לכן $a \in A$, לכן $A \neq \emptyset$.

$\forall x \in A : x \leq b$, לכן A חסומה מלעיל.

עפ"י אקסיומת החסם העליון, $c := \sup A$, קיים.

• $a < c$.

f רציפה מימין ב- a , לכן: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

תהי $x_n \searrow a$

עפ"י הגדרת הגבול לפי היינה, $f(x_n) \rightarrow f(a)$, לכן לבסוף:

$f(x_n) < d$, ז"א: $x_n \in A$.

לכן, לבסוף: $a < x_n \leq c$, לכן: $a < c$.

• $c < b$.

נניח בשלילה כי $c = b$.

תהי $x_n \rightarrow c$, $A \ni x_n$

f רציפה משמאל ב- c , לכן $f(x_n) \rightarrow f(c)$, והרי $f(b) = f(c)$ וכן -

$d < f(b)$, לכן: $d < f(c)$, לכן $f(x_n) \rightarrow f(c) > d$, לכן, לבסוף: $d < f(x_n)$, בסתירה לכך

ש- $x_n \in A$.

לכן: $c < b$.

• $f(c) = d$.

נניח בשלילה ש- $f(c) < d$.

תהי $x_n \searrow c$, לכן: $f(x_n) \rightarrow f(c) < d$, לכן לבסוף $f(x_n) < d$, ז"א: $x_n \in A$.

לכן, לבסוף: $c < x_n \leq c$, סתירה.

נניח בשלילה ש- $d < f(c)$.

תהי $x_n \rightarrow c$, $A \ni x_n$, לכן $f(x_n) \rightarrow f(c) > d$, לכן לבסוף: $d < f(x_n)$, בסתירה

לכך ש- $x_n \in A$.

לכן: $f(c) = d$, כדרוש.

■

22. למת וירשטרס: פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$, חסומה שם.

הוכחה

נוכיח עבור פונקציה חסומה מלעיל (עבור חסומה מלרע באופן דומה)

נניח בשלילה כי f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ אך אינה חסומה מלעיל שם.

לכן, בפרט כל $n \in \mathbb{N}$ אינו חסם מלעיל של f בקטע, לכן קיים $a \leq x_n \leq b$ כך ש -
 $n < f(x_n)$.

x_n חסומה (מלרע ע"י a , מלעיל ע"י b), לכן עפ"י משפט ויירשטרס קיימת לה תת סדרה מתכנסת $c_n \rightarrow c$. לכל $n \in \mathbb{N}$, $a \leq c_n \leq b$, לכן: $a \leq c \leq b$.
 $\infty \leftarrow n < f(x_n)$, לכן $f(x_n) \rightarrow \infty$. $f(c_n) \rightarrow \infty$ תת סדרה של $f(x_n)$, לכן: $f(c_n) \rightarrow \infty$.
 f רציפה בקטע $[a, b]$, לכן בפרט ב- c , לכן: $f(c_n) \rightarrow f(c) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{c} \in \mathbb{R} \\ \overline{f(c)} \leftarrow f(c_n) \rightarrow \infty \\ \notin \mathbb{R} \end{array}$$

סתירה.

לכן: f חסומה בקטע $[a, b]$, כדרוש.

■

23. משפט ויירשטרס: פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$, מקבלת מקסימום ומינימום

ש.ם.

הוכחה

נגדיר $A = \{f(x) : a \leq x \leq b\}$

$A \neq \emptyset$, וחסומה עפ"י למת ויירשטרס.

עפ"י אקסיומת החסם העליון $s = \sup A$ קיים.

תהי $A \ni f(x_n) \rightarrow s$

לכל $n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_n \leq b$, לכן x_n חסומה. עפ"י משפט ויירשטרס, קיימת לה תת סדרה

מתכנסת $c_n \rightarrow c$. לכל $n \in \mathbb{N}$, $a \leq c_n \leq b$, לכן: $a \leq c \leq b$.

$f(c_n) \rightarrow s$ תת סדרה של $f(x_n)$, לכן: $f(c_n) \rightarrow s$.

f רציפה ב- c , לכן: $f(c_n) \rightarrow f(c)$.

$$f(c) \leftarrow f(c_n) \rightarrow s$$

ומיחידות הגבול: $A \ni f(c) = s$, לכן: $s = \max A$, ובפרט $\max A$ קיים.

באופן דומה, $\min A$ קיים.

■

24. משפט קנטור: פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$, רציפה במידה שווה ש.ם.

הוכחה

נניח בשלילה כי f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$, אך אינה רציפה במידה שווה ש.ם.

עפ"י משפט, קיימות שתי סדרות $x_n, y_n \in [a, b]$ כך ש - $x_n - y_n \rightarrow 0$, אולם:

$$f(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$$

יהי $\varepsilon > 0$ כך ש- $\varepsilon \geq |f(x_n) - f(y_n)|$ עבור אינסוף ערכי n .
ע"י מעבר לתתי הסדרות הנקבעות ע"י ערכים אלו (שמקיימות גם הן את השלילה), ניתן להניח $\varepsilon \geq |f(x_n) - f(y_n)|$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
לכל $n \in \mathbb{N}$: $a \leq x_n \leq b$, לכן x_n חסומה. עפ"י משפט ויירשטרס קיימת לה תת סדרה מתכנסת $x_{m_n} \rightarrow c$.
 $x_{m_n} - y_{m_n} \rightarrow 0$ כתת סדרה של $x_n - y_n$, לכן (עפ"י אריתמטיקה של גבולות):
 $y_{m_n} \rightarrow c$.
לכל $n \in \mathbb{N}$: $a \leq x_{m_n} \leq b$, לכן: $a \leq c \leq b$.
מרציפות f ב- c : $f(x_{m_n}) \rightarrow f(c)$ ו- $f(y_{m_n}) \rightarrow f(c)$.
לכן (עפ"י אריתמטיקה של גבולות): $f(x_{m_n}) - f(y_{m_n}) \rightarrow 0$, לכן, בפרט עבור $0 < \varepsilon$, לבסוף: $|f(x_{m_n}) - f(y_{m_n})| < \varepsilon$, לכן בפרט: $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$ עבור אינסוף ערכי $n \in \mathbb{N}$. סתירה.
לכן: f רציפה במידה שווה בקטע $[a, b]$, כדרוש.

■

$$25. \text{ כלל השרשרת: } (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

הוכחה

$$(f(g(x)))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

נכפול ונחלק ב- $g(x+h) - g(x)$:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(\overset{:=a}{g(x+h)}) - f(g(x))}{\underset{:=a}{g(x+h)} - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

כדי להימנע ממכנה 0, נגדיר פונקציה:

$$D(h) = \begin{cases} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} & , \quad g(x+h) \neq g(x) \\ f'(g(x)) & , \quad g(x+h) = g(x) \end{cases}$$

עפ"י הגדרת $D(h)$, לכל h :

$$(*) \quad \frac{\overbrace{f(g(x+h)) - f(g(x))}^{\rightarrow (f(g(x)))'}}{h} = D(h) \cdot \frac{\overbrace{g(x+h) - g(x)}^{\rightarrow g'(x)}}{h}$$

נוכיח כי $D(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(g(x))$ ואז, נפעיל גבול על שני אגפי השוויון ונקבל את הדרוש.
נעבוד בלשון הסדרות.

תהי $h_n \rightarrow 0$

לסדרה שתי תתי סדרות:

1. האיברים h_n כך ש- $g(x + h_n) \neq g(x)$.

2. האיברים h_n כך ש- $g(x + h_n) = g(x)$.

אם אחת מתתי הסדרות סופית, היא אינה משפיעה על גבול הסדרה h_n , לכן ניתן להניח כי אנו תמיד באותו מקרה.

1. אם $g(x + h_n) \neq g(x)$.

$$D(h) = \frac{f(g(x+h_n)) - f(g(x))}{g(x+h_n) - g(x)} : D(h) \text{ עפ"י הגדרת } D(h)$$

$h_n \rightarrow 0$, לכן מרציפות g ב- x : $g(x) \neq g(x + h_n) \rightarrow g(x)$
לכן:

$$D(h) = \frac{f(g(x + h_n)) - f(g(x))}{g(x + h_n) - g(x)} \rightarrow \lim_{a \rightarrow g(x)} \frac{f(a) - f(g(x))}{a - g(x)} = f'(g(x))$$

2. אם $g(x + h_n) = g(x)$.

$$D(h) = f'(g(x)) : D(h) \text{ עפ"י הגדרת } D(h)$$

לכן: $D(h) \rightarrow f'(g(x))$, כסדרה קבועה.

אם שתי הסדרות אינסופיות, נראה באופן דומה כי הטענה נכונה עבור כל אחת מתתי הסדרות, ומשום ששתיהן מכסות את כל הסדרה, עפ"י משפט: $D(h_n) \rightarrow f'(g(x))$.

לכן: $D(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(g(x))$. מהפעלת גבול על שני אגפי השוויון (*), נקבל:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

■

26. משפט רול: תהי f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a, b) . אם

$$f(a) = f(b), \text{ קיימת נקודה } a < c < b \text{ כך ש- } f'(c) = 0$$

הוכחה

f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$, לכן עפ"י משפט ויירשטרס מקבלת מקסימום ומינימום שם.

• אם $\min f = \max f$.

f פונקציה קבועה בקטע $[a, b]$. לכן, לכל $a < c < b$: $f'(c) = 0$, כנגזרת של פונקציה קבועה.

• אם $\min f \neq \max f$.

$f(a) = f(b)$, לכן לא ייתכן כי $a = \min f$ ו- $b = \max f$ (או ההיפך).

תהי אפוא $a < c < b$ נקודת אקסטremום.

עפ"י משפט פרמה: $f'(c) = 0$, כדרוש.

■

27. משפט הערך הממוצע (לגרנז'): תהי f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ וגזירה בקטע הפתוח

$$(a, b). \text{ קיימת נקודה } a < c < b \text{ כך ש- } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

הוכחה

משוואת הישר העובר בנקודות $(a, f(a))$ ו- $(b, f(b))$:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$$

\tilde{f} פולינום, לכן רציף וגזיר בכל \mathbb{R} . f רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) , לכן \tilde{f} רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) , כסכום של פונקציות רציפות וגזירות בקטעים המתאימים.

נגדיר פונקציה: $\tilde{f} = f - y$. עפ"י הגדרת \tilde{f} , לכל $x \in [a, b]$:

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$$

↓

$$f(a) = f(b) = 0$$

עפ"י משפט רול, קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש- $\tilde{f}'(c) = 0$.

עפ"י הגדרת \tilde{f} :

$$\tilde{f}'(c) = (f - y)'(c) = f'(c) - y'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

↓

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

כדרוש.

■

28. משפט לופיטל: יהיו $\lambda \in \{0, \infty\}$ ו $-\infty \leq a, b \leq \infty$. יהיו f, g רציפות בסביבה

מנוקבת של a ומקיימות שם:

1. $g'(x) \neq 0$.

2. $f(x), g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda$.

3. $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ במובן הרחב.

אז: $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} b$.

המשפט נכון גם עבור סביבה חד צדדית של a וגבולות חד צדדיים מתאימים.

הוכחה

ראה [הרצאה 24](#).

