תרגיל 3

שאלה 1: הוכח שת"ח הבאות הן נורמליות ע"י כך שתראה שהן גרעין של איזשהו הומומורפיזם:

(א) $\{e_G\} \times G \leq G \times G$ (רמז: התבונן בהטלה $(x,y) \mapsto x$).

(ב) $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ (רמז: $a \mapsto a(mod\, n)$).

שאלה 2: הוכיחו $Z(G) \trianglelefteq G$ (עדיף לא בעזרת גרעין של הומומורפיזם).

שאלה 3: הוכח שאם $H, K \trianglelefteq G$ אזי $H \cap K \trianglelefteq G$ וגם $HK \trianglelefteq G$.

שאלה 4: התבונן בת"ח $H = \langle(12)(34)\rangle \leq V_4 \leq S_4$, הוכח ש $H \trianglelefteq V_4, V_4 \trianglelefteq S_4$ אבל H היא לא תח"נ של S_4. (כלומר שלהיות ת"חנ זו לא תכונה נורשת).
תזכורת: $V_4 = \{id,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (23)(14)\}$חבורת קליין.

שאלה 5: הוכח שאם $N \trianglelefteq G$ ו- $K \leq G$ אזי $K \cap N \trianglelefteq K$.

שאלה 6: תראו את הקוסטים השמאליים של ת"ח הבאות וקבעו מהו האינדקס שלהם:

(א) $6\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

(ב) $< 9 > \leq U_{10}$

(ג) $\{0\} \times \mathbb{Z}_3 \leq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

שאלה 7: תהא G חבורה ו $H \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית. הוכח/הפרך

(א) אם G ציקלית גם G/H ציקלית.

(ב) אם G/H ציקלית גם G ציקלית.

שאלה 8:

נתון: $H_2 \trianglelefteq G_2$ וגם $H_1 \trianglelefteq G_1$. הוכח:

(א) $(H_1 \times H_2) \trianglelefteq (G_1 \times G_2)$

(ב) $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$

שאלה 9:

תהא G חבורה ו $N, K \trianglelefteq G$ שתי תתי חבורה נורמליות המקיימות $N \cap K = \{e\}$.
הוכיחו כי

$$\forall x \in N, y \in K : xy = yx$$

[הדרכה: התבוננו ב $x^{-1}y^{-1}xy$]

שאלה 10: תהא G חבורה ו $N \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית המקיימת $|{}^{G}/_{N}| = p$ כאשר p מספר ראשוני.

(א) הוכיחו לכל $g \in G - N$ מתקיים כי $g, g^2, \dots g^p$ נציגים של מחלקות שונות ב ${}^{G}/_{N}$ (ולכן ${}^{G}/_{N} = \{g^i N \,:\, 1 \le i \le p\}$)

(ב) הוכיחו כי אם בנוסף $N \subseteq Z(G)$ (כלומר N מוכלת במרכז של G) אזי G חבורה חילופית (או מילים אחרות $Z(G) = G$).

שאלה 11: תהא G חבורה חילופית. נגדיר $D = \{(g,g) \,:\, g \in G\} \subseteq G \times G$. הוכיחו כי זהוי תת חבורה נומאלית של $G \times G$ והראו כי

$${}^{G \times G}/_{D} \cong G$$

שאלה 12: הוכח כי אם G אבלית, אזי כל מנה שלה היא גם אבלית. דהיינו: לכל $G \trianglelefteq H$ חבורת המנה G/H היא אבלית.

שאלה 13: (א) מהו הסדר של 3 בחבורה $\mathbb{Z}$? מהו הסדר של $3 + 5\mathbb{Z}$ בחבורה ${}^{\mathbb{Z}}/_{5\mathbb{Z}}$?

(ב) מהו הסדר של 9 בחבורה U_{14}? מהו הסדר של $9H$ בחבורה ${}^{U_{14}}/_{H}$ כאשר $H = <13>$?

(ג) ובאופן כללי הוכח: תהי חבורה G , H תח"נ ו $g \in G$, הסדר של gH ב G/H שווה למס' הטבעי המינימלי n כך ש $g^n \in H$.

שאלה 14: מצאו את 2 הספרות האחרונות של $8073767^{1999} + 2011$. תזכורת לפונקצית אוילר: $\varphi(n) = n \prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$ כאשר המכפלה היא על הגורמים הראשוניים של n.

שאלה 15:

ראינו מסקנה ממשפט לגרנג: סדר של איבר מחלק את גודל החבורה. הראה שהכיוון ההפוך אינו נכון: מצא חבורה מסדר n ומספר k כך ש $k|n$ אבל אין בחבורה איבר מסדר k. (רמז: חבורות לא צקליות).

שאלה 16: נגדיר $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ מעגל היחידה עם פעולת כפל . הוכיחו כי

(א) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong G$ [הדרכה: השתמשו בפונקציה $e^{2\pi x i}$]

(ב) נגדיר $H \le G$ להיות כל שורשי היחידה מסדר כלשהו. כלומר

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

כאשר $U_n = \{z \in G \,:\, z^n = 1\}$ הם שורשי היחידה מסדר n.
בעזרת סעיף קודם, הראו כי H איזומורפית ל $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

<u>**נכון חברים, זה אכן הרבה שאלות, אך ישנם גם הרבה הגדרות ומושגים ואנו רוצים לתרגל את כולם.**</u>

<u>**מי שמרגיש שהבין נושא מסוים יכול לפתור לא את כל התרגילים בנושא. ישנם הרבה תרגילים כדי שתוכלו להשתפשף היטב בכל הנושאים ברמות שונות.**</u>