הסתברות מתמטית - 88-373

תקציר

להלן סיכום החומר למבחן בקורס 88-373 - הסתברות מתמטית, שניתן ע"י פרופסור מרדכי לוין, בסמסטר ב' של שנה"ל תשע"ה באוניברסיטת בר-אילן. הסיכום כולל בחלקו הראשון את רשימת כל המשפטים הנחוצים למבחן והוכחותיהם, בחלקו השני שאלות בסגנון המבחן ופתרונותיהן המלאים, וכנספח דף נוסחאות מתורגם. הניסוחים כמו גם הפתרונות מבוססים על סיכומי ההרצאות וחומרי עזר בקורס.

להערות, שלחו הודעות אל $MutualReplies@gmail.com$.

1 משפטים

משפט (הגבול המרכזי):
יהיו $X_1^{\perp}, X_2^{\perp}, \ldots$ משתנים מקריים בלתי-תלויים שווי-התפלגות עם שונות סופית ונניח בה"כ $\mathrm{E}\left(X_n\right)=0$, $\mathrm{Var}\left(X_n\right)=1$. אזי

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

הוכחה: נגדיר

$$Y_n=\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$$

לכן רוצים להוכיח $Y_n \xrightarrow{d} N(0,1)$, כלומר

$$F_{Y_n}(t) \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \Phi(t)$$

הוכחנו ששקול להוכיח

$$\varphi_{Y_n}(t) \rightarrow \varphi_{N(0,1)}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

מתקיים:

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_n}(t) &= \mathrm{E}\left(e^{i\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}t}\right) = \mathrm{E}\left(e^{\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{itX_j}{\sqrt{n}}}\right) = \mathrm{E}\left(\prod_{j=1}^{n} e^{iX_j\dfrac{t}{\sqrt{n}}}\right) \overset{\star}{=} \\
&= \prod_{j=1}^{n}\varphi_{X_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \alpha_n
\end{aligned}$$

כאשר ב־$\star$ השתמשנו באי־תלות של המשתנים. נשים לב כי

$$\alpha_n = e^{n\ln\left(1-\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2}{2}\left(1+o\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\alpha_n = e^{\beta}$$

כאשר

$$\begin{aligned}
\beta &= \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1-\frac{t^2}{2n}\left(1+o\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) = \{\ln(1+x) = x+o(x)\} = \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{t^2}{2n}\left(1+o\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)+o\left(\frac{t^2}{2n}\left(1+o\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)\right) = -\frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

כדרוש.

<u>משפט (החוק החלש של מספרים גדולים)</u>:

יהיו $X_1{}^{\perp},\dots X_n^{\perp},\dots$ משתנים מקריים ב"ת, שווי התפלגות, עם תוחלת $E[X_i]=\mu<\infty$.
נסמן $S_n=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. אזי $S_n\xrightarrow{d}\mu$ ו־ $S_n\xrightarrow{p}\mu$.

<u>הוכחה:</u>

ראשית, נראה כי $S_n\xrightarrow{d}\mu$. מתקיים:

$$E\left[e^{itS_n}\right] = E\left[e^{\frac{i(X_1+\cdots+X_n)}{n}t}\right] = \prod_{j=1}^{n}E\left[e^{\frac{itx_j}{n}}\right] = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

כעת, ראינו כי מתקיים $\varphi_{X_1}(t)=1+it\mu+o(t), t\to 0$, ולכן

$$E\left[e^{itS_n}\right] = \left(1+\frac{it\mu}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{it\mu}{n}(1+o(t))\right)} \xrightarrow{n\to\infty} e^{it\mu}$$

זו בדיוק הטרנספורמציה של המ"מ הקבוע μ, כדרוש.
כעת, נשים לב שמתקיים:

$$\begin{aligned}
P(|S_n-\mu|\ge\epsilon) &= P(S_n-\mu\ge\epsilon)+P(S_n-\mu\le-\epsilon) \\
&\le P\left(S_n-\mu\ge\frac{\epsilon}{2}\right)+F_{S_n}(\mu-\epsilon) \\
&= 1-P\left(S_n-\mu\le\frac{\epsilon}{2}\right)+F_{S_n}(\mu-\epsilon) \\
&= 1-F_{S_n}\left(\mu+\frac{\epsilon}{2}\right)+F_{S_n}(\mu-\epsilon)
\end{aligned}$$

לפי השאיפה $F_{S_n} \to F_\mu$, ומכך ש־ $F_\mu(x) = \begin{cases} 1 & x \geq \mu \\ 0 & x < \mu \end{cases}$, נקבל $F_{S_n}(\mu - \epsilon) \to 0$ ו־ $F_{S_n}\left(\mu + \frac{\epsilon}{2}\right) \to 1$, ולכן $P\left(|S_n - \mu| \geq \epsilon\right) \to 0$, כדרוש.

משפט (התפלגות רב נורמלית):

X רב נורמלי $\iff$ $\varphi_X(\overline{a}) = e^{i\langle \overline{\mu}, \overline{a}\rangle - \frac{\overline{a}V\overline{a}^t}{2}}$ כאשר $\mu_i = E[X_i]$, $V_{i,j} = cov(X_i, X_j)$ ו־ V סימטרית אי שלילית.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח X רב נורמלי. יהי $\overline{a} \in R^n$. לפי ההגדרה: $Y := \langle \overline{a}, X\rangle = \sum_{j=1}^n a_j X_j \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$. אנחנו כבר יודעים את הפונקציה האופינית של משתנה נורמלי לכן $\varphi_Y(v) = E\left[e^{iYv}\right] = e^{i\mu v - \frac{(v\sigma)^2}{2}}$, כאשר:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mathrm{Var}\left(Y\right) = E\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right)^2\right] - E\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right]^2 = E\left[\sum_{i,j=1}^n a_i\left(E\left[X_iX_j\right] - E\left[X_i\right]E\left[X_j\right]\right)a_j\right] = \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_i \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)a_j = \overline{a}V\overline{a}^t \\
\mu &= E\left[\sum_{j=1}^n a_j X_j\right] = \sum_{j=1}^n a_j E\left[X_j\right] = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j = \langle \overline{a}, \overline{\mu}\rangle
\end{aligned}
$$

נציב ונקבל $\varphi_Y(v) = e^{i\langle \overline{a}, \overline{\mu}\rangle v - \frac{v^2 \overline{a}V\overline{a}^t}{2}}$. כעת נשים לב שמתקיים:

$$
E\left[e^{i\langle \overline{a}, X\rangle}\right] = \varphi_{\langle \overline{a}, X\rangle}(1) = \varphi_Y(1) = e^{i\langle \overline{\mu}, \overline{a}\rangle - \frac{\overline{a}V\overline{a}^t}{2}}
$$

($\Rightarrow$) נניח ש $\varphi_X(\overline{a}) = e^{i\langle \overline{\mu}, \overline{a}\rangle - \frac{\overline{a}V\overline{a}^t}{2}}$, נראה ש־ X רב נורמלי. יהי $Y := \langle \overline{a}, X\rangle = \sum_{j=1}^n a_j X_j$. אזי:

$$
\varphi_Y(v) = E\left[e^{iYv}\right] = E\left[e^{i\langle \overline{a}, X\rangle v}\right] = \varphi_X(\overline{a}v) = e^{i\langle \overline{\mu}, \overline{a}\rangle v - v^2\frac{\overline{a}V\overline{a}^t}{2}}
$$

זו פונקציה אופינית של משתנה נורמלי ולכן Y הוא משתנה נורמלי. נשאר להראות ש־

$$
\mathrm{Var}\left(Y\right) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i,j=1}^n a_i \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)a_j = \overline{a}V\overline{a}^t
$$

זה מוכיח את הטענה.

משפט (התפלגות סטודנט): יהיו $X_1, ^{\perp} \dots X_n^{\perp}, \dots \sim N(0,1)$. נגדיר $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ ו־ $S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$. אז $\frac{\bar{X}\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}$ מתפלג t_{n-1}.

הוכחה: ראשית, מתקיים:

- $Var(\bar{X_n}) = \frac{1}{n}$,$E[\bar{X}_n] = 0$
-

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X_n}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - 2X_i\bar{X} + \bar{X}_n^2\right) = \\ &= \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right) - 2n\bar{X}_n^2 + n\bar{X}_n^2\right] = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}_n^2\right) \end{aligned}$$

- מתקיים $E[X^2] = \mathrm{Var}\,(X) + E[X]^2 = 1$, ולכן בפרט $E\left[S_n\right] = \frac{1}{n-1}\left(n-1\right) = 1$.

כעת, נביט בטרנספורמציה:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}} & -\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} & \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} & \frac{-2}{\sqrt{3\cdot 2}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & \frac{-(n-1)}{\sqrt{n(n-1)}} \end{pmatrix}$$

ונגדיר $Y = XA^t$. המטריצה A היא אורתוגונלית, ולכן לפי משפט $Y \sim N(0, I)$ (I מטריצת היחידה). בפרט נובע כי $\forall i \neq j : \mathrm{Cov}\left(Y_i, Y_j\right) = 0$, ולכן $Y_1, \ldots, Y_n$ בלתי מתואמים ולכן הם גם בלתי תלויים.
מתקיים $YY^t = XA^t\left(XA^t\right)^t = XAA^tX^t = XX^t$, כלומר $\sum_{i=1}^{n}X_i^2 = \sum_{i=1}^{n}Y_i^2$.
בנוסף $Y_1^2 = n\bar{X}_n^2$, ולכן

$$\left(n-1\right)S_n = \sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X_n}^2 = Y_1^2 + \cdots + Y_n^2 - Y_1^2 = Y_2^2 + \cdots + Y_n^2$$

לכן $(n-1)S_n \sim \chi_{n-1}$. בנוסף, מתקיים $n\bar{X_n}^2 = Y_1^2 \sim N(0,1)$ כלומר $\bar{X}_n \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$, ומכך ש־$Y_i$ ב"ת מקבלים יחד כי $(n-1)S_n$ ו־ $\bar{X}_n$ בלתי תלויים, ואם נשלב הכל ביחד נקבל לפי משפט $\frac{\bar{X}\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}} \sim t_{n-1}$.

<u>משפט (אי־השוויון המקסימלי של לתת־מרטינגלים של דוב):</u>

יהי $(M_n, \mathcal{F}_n)$ תת־מרטינגל חיובי. אזי

$$P\left(\max_{1\leq j\leq n} M_j \geq \alpha\right) \leq \frac{\mathrm{E}\left(M_n\right)}{\alpha}$$

הוכחה: נגדיר זמן עצירה

$$\tau(\omega) := \min\{j \geq 1 \mid M_j(\omega) \geq \alpha\}$$

(או ∞, אם אין ω כזה). לכן,

$$P\left(\max_{1\leq j\leq n} M_j \geq \alpha\right) = P(\tau \leq n) = E\left[I_{\{\tau\leq n\}}\right] \leq E\left[I_{\{\tau\leq n\}}\frac{M_{\tau(w)}}{\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha}E\left[I_{\{\tau\leq n\}}M_{\tau\wedge n}\right] \leq \frac{1}{\alpha}E\left[M_{\tau\wedge n}\right]$$

ולכן

$$P\left(\max_{1\leq j\leq n} M_j \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha}E\left[M_{\tau\wedge n}\right] \leq \frac{1}{\alpha}E\left[M_{\alpha}\right]$$

משפט (התכנסות מרטינגלית ב־L^2):

יהי $(M_n, \mathcal{F}_n)$ מרטינגל כך שלכל n, $M_n \in \mathcal{L}^2$. אזי

$$\sup_n \mathrm{E}\left(M_n^2\right) \leq C < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left((M_n - M_{n-1})^2\right) < \infty$$

במקרה זה,

$$M_n \overset{\text{a.s.},\mathcal{L}^2}{\longrightarrow} M_\infty$$

הוכחה: נגדיר $M_{-1} = 0$, ונרשום

$$M_n = (M_n - M_{n-1}) + (M_{n-1} - M_{n-2}) + \cdots + (M_1 - M_0) + M_0 = \sum_{i=0}^{n}(M_i - M_{i-1})$$

זהו פירוק אורתוגונלי, במובן שמתקיים לכל $i > j$:

$$\begin{aligned}
\langle M_i - M_{i-1}, M_j - M_{j-1}\rangle &= \mathrm{E}\left((M_i - M_{i-1})(M_j - M_{j-1})\right) = \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left((M_i - M_{i-1})(M_j - M_{j-1}) \mid \mathcal{F}_j\right)\right) = \\
&= \mathrm{E}\left((M_j - M_{j-1})\,\mathrm{E}\left(M_i - M_{i-1} \mid \mathcal{F}_j\right)\right)
\end{aligned}$$

אבל

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(M_i - M_{i-1} \mid \mathcal{F}_j\right) &= \mathrm{E}\left(M_i \mid \mathcal{F}_j\right) - \mathrm{E}\left(M_{i-1} \mid \mathcal{F}_j\right) = \\
&= \mathrm{E}\left(M_i \mid \mathcal{F}_j\right) - \mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(M_i \mid \mathcal{F}_{i-1}\right) \mid \mathcal{F}_j\right) = \\
&= \mathrm{E}\left(M_i \mid \mathcal{F}_j\right) - \mathrm{E}\left(M_i \mid \mathcal{F}_j\right) = 0
\end{aligned}$$

ולכן הפירוק אורתוגונלי. נקבל שלכל n,

$$\mathrm{E}\left(M_n^2\right)=\mathrm{E}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(M_i-M_{i-1}\right)\sum_{j=0}^{n}\left(M_j-M_{j-1}\right)\right)\underset{\text{orthogonality}}{=}\sum_{i=0}^{n}\mathrm{E}\left(\left(M_i-M_{i-1}\right)^2\right)$$

לכן, מקבלים את השקילות הראשונה: הטור מתכנס אם ורק אם התוחלת של הריבוע חסומה.
כעת נניח שזה המצב. לכל $n>r$,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\left(M_n-M_r\right)^2\right) &= \mathrm{E}\left(M_n^2-2M_nM_r+M_r^2\right)=\mathrm{E}\left(M_n^2\right)-2\mathrm{E}\left(M_nM_r\right)+\mathrm{E}\left(M_r^2\right)= \\ &= \mathrm{E}\left(M_n^2\right)-2\mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(M_nM_r\mid\mathcal{F}_r\right)\right)+\mathrm{E}\left(M_r^2\right)= \\ &= \mathrm{E}\left(M_n^2\right)-2\mathrm{E}\left(M_r\mathrm{E}\left(M_n\mid\mathcal{F}_r\right)\right)+\mathrm{E}\left(M_r^2\right)= \\ &= \mathrm{E}\left(M_n^2\right)-2\mathrm{E}\left(M_r^2\right)+\mathrm{E}\left(M_r^2\right)=\mathrm{E}\left(M_n^2\right)-\mathrm{E}\left(M_r^2\right)\end{aligned}$$

כיוון שהטור מתכנס,

$$\forall\varepsilon>0\,\exists n\left(\varepsilon\right)\,\forall n,r\geq n\left(\varepsilon\right):\mathrm{E}\left(M_n^2\right)-\mathrm{E}\left(M_r^2\right)=\sum_{i=r+1}^{n}\mathrm{E}\left(\left(M_i-M_{i-1}\right)^2\right)\leq\varepsilon$$

לכן $\mathrm{E}\left(M_n^2\right)-\mathrm{E}\left(M_r^2\right)\underset{n,r\to\infty}{\longrightarrow}0$, כלומר זו סדרת קושי. אבל $\mathcal{L}^2$ מרחב שלם, ולכן $M_n\xrightarrow{\mathcal{L}^2}M_\infty$.

נותר להוכיח שההתכנסות היא a.s. $M_n\xrightarrow{\mathcal{L}^2}M_\infty$, לכן $M_n\xrightarrow{P}M_\infty$, ומכאן שקיימת תת־סדרה n_k שעבורה $M_{n_k}\xrightarrow{\text{a.s.}}M_\infty$.
כלומר, קיימת קבוצה B, $P\left(B\right)=1$, כך שלכל $\omega\in B$, $M_{n_k}\left(\omega\right)\longrightarrow M_\infty\left(\omega\right)$.
ניעזר באי־השוויון המקסימלי לתת־מרטינגלים של דוב; לפיו, לכל מרטינגל X_n,

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|X_k\right|\geq\lambda\right)\leq\frac{\mathrm{E}\left(X_n\right)}{\lambda}$$

לכל $p>n_k$, נסתכל על $M_p-M_{n_k}$. זהו מרטינגל, כי

$$\mathrm{E}\left(M_p-M_{n_k}\mid\mathcal{F}_{p-1}\right)=M_{p-1}-\mathrm{E}\left(M_{n_k}\mid\mathcal{F}_{p-1}\right)=M_{p-1}-M_{n_k}$$

לפי אי־השוויון של דוב,

$$P\left(\underbrace{\max_{n_k\leq p\leq n_{k+1}}\left|M_p-M_{n_k}\right|\geq2^{-\frac{k}{2}}}_{A_k}\right)\leq\frac{\mathrm{E}\left(\left|M_p-M_{n_k}\right|\right)}{2^{-\frac{k}{2}}}\overset{\star}{\leq}\frac{2^{-k}}{2^{-\frac{k}{2}}}=2^{-\frac{k}{2}}$$

כאשר ב־$\star$ השתמשנו בבנייה של תת־הסדרה M_{n_k}; בוחרים אותה תמיד כך שלגל $p\geq n_k$,

$$P\left(\left|M_\infty-M_p\right|\geq\frac{1}{2^{k+1}}\right)\leq\frac{1}{2^{k+1}}$$

לפי למת בורל־קנטלי, $P\left(A_{\text{i.o.}}\right)=0$, כלומר $P\left(A_{\text{i.o.}}^{c}\right)=1$.
נניח $\omega\notin A_{\text{i.o.}}$; לכן קיים $N\left(\omega\right)$ כך שלכל $k\geq N\left(\omega\right)$, $\omega\notin A_{k}$, כלומר

$$\max_{n_{k}\leq p\leq n_{k+1}}\left|M_{p}-M_{n_{k}}\right|\leq2^{-\frac{k}{2}}$$

נשים לב כי $P\left(B\cap A_{\text{i.o.}}^{c}\right)=1$, ולכן ניקח $\omega\in B\cap A_{\text{i.o.}}^{c}$. בסך הכל, $M_{p}\left(\omega\right)\longrightarrow M_{\infty}\left(\omega\right)$.
לכן באמת $M_{n}\xrightarrow{\text{a.s.}}M_{\infty}$.

<u>משפט (התכנסות המרטינגל של לוי)</u>

יהי $\left(X_{n},\mathcal{F}_{n}\right)_{n>0}$ מרטינגל אינטגרבילי במידה שווה. אז:

1. קיים $X_{\infty}=\lim\limits_{n\to\infty}X_{n}$ כמעט תמיד.
2. $X_{\infty}\in\mathcal{L}^{1}$.
3. $X_{n}\to X_{\infty}$ ב־$\mathcal{L}^{1}$.
4. $X_{n}=E\left[X_{\infty}\mid\mathcal{F}_{n}\right]$.

גם ההפך נכון: אם $Y\in\mathcal{L}^{1}$, אז $M_{n}:=E\left[Y\mid\mathcal{F}_{n}\right]$ אינטגרבילי במידה שווה.
<u>הוכחה:</u>
יהי $\varepsilon>0$. לפי הגדרת אינטגרביליות במידה שווה, קיים c כך ש־ $\sup\limits_{n}E\left[\left|X_{n}\right|1_{\left\{ \left|X_{n}\right|>c\right\} }\right]\leq\varepsilon$. לכן

$$E\left[\left|X_{n}\right|\right]=E\left[\left|X_{n}\right|1_{\left\{ \left|X_{n}\right|>c\right\} }\right]+E\left[\left|X_{n}\right|1_{\left\{ \left|X_{n}\right|\leq c\right\} }\right]\leq\varepsilon+c$$

מכאן נובע ש־ $\sup E\left[X_{n}^{+}\right]\leq\sup E\left[\left|X_{n}\right|\right]\leq\infty$, ולכן לפי משפט התכנסות המרטינגל $X_{\infty}:=\lim\limits_{n\to\infty}X_{n}$ קיים כמעט תמיד וגם אינטגרבילי.
כעת נרצה להראות ש$X_{n}\overset{\mathcal{L}^{1}}{\to}X_{\infty}$. נגדיר:

$$f_{c}(x)=\begin{cases}
c & x>c\\
x & |x|<c\\
-c & x<-c
\end{cases}$$

קל לראות ש־f_{c} היא ליפשיץ. נשים לב ש:

$$\begin{aligned}
\left|f_{c}(X_{n})-X_{n}\right| & = \left|X_{n}1_{\left\{ \left|X_{n}\right|\leq c\right\} }+c1_{\left\{ X_{n}>c\right\} }-c1_{\left\{ X_{n}<-c\right\} }-X_{n}\right|=\\
 & = \left|\left(X_{n}1_{\left\{ \left|X_{n}\right|\leq c\right\} }-X_{n}1_{\left\{ \left|X_{n}\right|\leq c\right\} }\right)+\left(-c1_{\left\{ X_{n}<-c\right\} }-X_{n}1_{\left\{ X_{n}<-c\right\} }\right)+\right.\\
 & + \left.\left(c1_{\left\{ X_{n}>c\right\} }-X_{n}1_{\left\{ X_{n}>c\right\} }\right)\right|\leq\\
 & \leq \left|X_{n}1_{\left\{ X_{n}<-c\right\} }\right|+\left|X_{n}1_{\left\{ X_{n}>c\right\} }\right|\leq\left|X_{n}\right|1_{\left\{ \left|X_{n}\right|\leq c\right\} }\to0
\end{aligned}$$

לכן אפשר למצוא c כך ש־$\left|f_c\left(X_n\right)-X_n\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ לכל n, וגם $\left|f_c\left(X_\infty\right)-X_\infty\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.
$\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty$. כמעט תמיד לכן $\lim_{n\to\infty}f_c(X_n)=f_c(X_\infty)$ כמעט תמיד.
f_c חוסמת את $f_c\left(X_n\right)$ ואינטגרבילית לכן ניתן להשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת לומר ש־$E\left[\left|f_c(X_n)-f_c(X_\infty)\right|\right]\to 0$. לכן עבור $n\geq N$ גדול מספיק מתקיים

$$E\left[\left|f_c(X_n)-f_c(X_\infty)\right|\right]<\frac{\varepsilon}{3}$$

ביחד מקבלים:

$$\begin{aligned}
E\left[\left|X_n-X_\infty\right|\right] &= E\left[\left|X_n-f_c\left(X_n\right)+f_c\left(X_n\right)-f_c\left(X_\infty\right)+f_c\left(X_\infty\right)-X_\infty\right|\right]\\
&\leq E\left[\left|X_n-f_c\left(X_n\right)\right|\right]+E\left[\left|f_c\left(X_n\right)-f_c\left(X_\infty\right)\right|\right]+E\left[\left|f_c\left(X_\infty\right)-X_\infty\right|\right]\leq\\
&\leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon
\end{aligned}$$

לכן $X_n\overset{\mathcal{L}^1}{\to}X_\infty$.
נשאר להראות ש: $X_n=E\left[X_\infty\mid\mathcal{F}_n\right]$. יהי $A\in\mathcal{F}_m$ ו־ $n>m$. אזי $E\left[X_m 1_A\right]=E\left[E\left[X_n\mid\mathcal{F}_n\right]1_A\right]=E\left[X_n 1_A\right]$, ובנוסף

$$\left|E\left[X_n 1_A\right]-E\left[X_\infty 1_A\right]\leq E\left[\left|X_n-X_\infty\right|1_A\right]\leq E\left[\left|X_n-X_\infty\right|\right]\to 0\right|$$

לכן $E\left[X_n 1_A\right]=E\left[X_\infty 1_A\right]$ כלומר $E\left[X_\infty\mid\mathcal{F}_n\right]=X_n$.
<u>נוכיח את ההפך:</u>
ברור ש־(M_n)מרטינגל. יהי $c>0$. לפי הגדרה (ובגלל ש $\{|M_n|>c\}\in\mathcal{F}_n$):

$$M_n 1_{\{|M_n|>c\}}=E\left[Y 1_{\{|M_n|>c\}}\mid\mathcal{F}_n\right]$$

כעת, לכל $d>0$ מתקיים

$$\begin{aligned}
E\left[\left|M_n\right|1_{\{|M_n|>c\}}\right] &\leq E\left[E\left[\left|Y\right|1_{\{|M_n|>c\}}\mid\mathcal{F}_n\right]\right]=E\left[Y 1_{\{|M_n|>c\}}\right]\leq\\
&\leq E\left[\left|Y\right|1_{\{|Y|>d\}}\right]+d\cdot P\left(\left|M_n\right|>c\right)\leq E\left[\left|Y\right|1_{\{|Y|>d\}}\right]+\frac{d}{c}E\left[\left|M_n\right|\right]
\end{aligned}$$

אפשר לבחור d מספיק גדול כך ש $E\left[\left|Y\right|1_{\{|Y|>d\}}\right]<\frac{\varepsilon}{2}$. ואז פשוט לבחור c עוד הרבה יותר גדול כך ש $\frac{d}{c}E\left[\left|M_n\right|\right]<\frac{\varepsilon}{2}$. מקבלים שמתקיים לכל n:

$$E\left[\left|M_n\right|1_{\{|M_n|>c\}}\right]\leq\varepsilon$$

<u>**משפט (החוק החזק של מספרים הגדולים):**</u>

נניח כי $X_1,^{\perp}\ldots,X_n^{\perp},\ldots$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות ו־$X_i\in\mathcal{L}^1$, ונסמן $S_n=X_1+\cdots+X_n$. אזי $\frac{S_n}{n}\overset{a.s}{\to}E[X_1]$.

הוכחה: נגדיר $T_{-n}=\sigma\left(S_n,S_{n+1},\dots\right)$. מטעמי סימטריה מתקיים

$$E\left[X_{n+1}\mid T_{-n-1}\right]=E\left[X_i\mid T_{-n-1}\right]$$

לכל $1\le i\le n+1$. לכן:

$$E\left[X_{n+1}\mid T_{-n-1}\right]=\frac{1}{n+1}E\left[X_1+\dots+X_{n+1}\mid T_{-n-1}\right]=\frac{1}{n+1}E\left[S_{n+1}\mid T_{-n-1}\right]$$

כעת, S_{n+1} הוא T_{-n-1}־מדיד, ולכן $E\left[X_{n+1}\mid T_{-n-1}\right]=\frac{S_{n+1}}{n+1}$. לכן נגדיר $Y_{-n}=\frac{S_n}{n}$.
מתקיים

$$\begin{aligned}E\left[Y_{-n}\mid T_{-n-1}\right] &= E\left[\frac{S_{n+1}-X_{n+1}}{n}\mid T_{-n-1}\right]=\frac{S_{n+1}}{n+1}-E\left[\frac{X_{n+1}}{n+1}\mid T_{-n-1}\right]= \\ &= \frac{S_{n+1}}{n}-\frac{S_{n+1}}{n(n+1)}=\frac{S_{n+1}}{n+1}=Y_{-n-1}\end{aligned}$$

ולכן $\left(Y_{-n},T_{-n}\right)$ הוא מרטינגל הפוך. כמו כן, מתקיים

$$Y_{-n}=E\left[Y_1\mid T_{-n}\right]=E\left[X_1\mid T_{-n-1}\right]$$

ולכן

$$E\left[\left|Y_{-n}\right|\right]=E\left[\left|E\left[X_1\mid T_{-n-1}\right]\right|\right]\le E\left[E\left[\left|X_1\right|\mid T_{-n-1}\right]\right]=E\left[\left|X_1\right|\right]<\infty$$

ובפרט אינטגרביליים במ"ש.
לכן, ממשפט התכנסות המרטינגל, $\exists Y_{-\infty}:Y_{-n}\to Y_{-\infty}$, כלומר $\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\to Y_{-\infty}$.
נזיז ב־k: $\frac{X_{1+k}+\dots+X_{n+k}}{n}\to Y_{-\infty}$. זה נכון לכל k , ולכן $Y_{-\infty}$ מדיד לפי כל אלגברה $\mathcal{F}_{-n}=\sigma\left(X_n,X_{n+1},\dots\right)$, ולכן גם לפי $\mathcal{F}_{-\infty}$. לכן, לפי חוק $0-1$ של קולמוגורוב, $X_{-\infty}=c$ ־ קבוע.
קיבלנו $\frac{X_1+\dots X_n}{n}\overset{a.s.}{\to}c$. מצד שני, לפי החוק החלש של מספרים גדולים

$$\frac{X_1+\dots X_n}{n}\overset{P}{\to}E[X_1]$$

ולכן קיימת $\{n_k\}$ כך ש־$\frac{S_{n_k}}{n_k}\overset{a.s.}{\to}E[X_1]$, וגם $\frac{S_{n_k}}{n_k}\to c$, ולכן $c=E[X_1]$ כדרוש.

משפט (חוק ה־$0-1$ של קולמוגורוב):

תהי $X_1^{\perp},X_2^{\perp}\cdots$ סדרה של מ"מ ב"ת. נגדיר $T_n=\sigma\left(X_n,X_{n+1},\dots\right)$ ואת σ־אלגברת הזנב $T_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}T_n$. מאורע $A\in T_\infty$ יקרא מאורע זנב.
אזי אם Aמאורע זנב אז $P\left(A\right)=0$ או $P\left(A\right)=1$.
הוכחה:
יהי $A\in T_\infty$, אם נראה ש $E\left[1_A\right]=1_A$ כמעט תמיד אז $1_A=0P\left(A^c\right)+1P\left(A\right)$, מה שיאמר ש $P\left(A\right)=0$ או $P\left(A\right)=1$.

נוכיח משהו חזק יותר: $\forall\eta \in T_\infty : E\left[\eta\right] = \eta$.
נסמן $\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ $\mathcal{F}_n = \sigma$ ו־ $\mathcal{F}_\infty = \sigma(Y_1,Y_2,\ldots)$. אם $\eta \in \mathcal{L}^1(\Omega,T)$ (כלומר ηמדידה לפי Tואינטגרבילית) אז ברור ש $\eta \in \mathcal{F}_\infty$.
נגדיר $X_n := E\left[\eta \mid \mathcal{F}_n\right]$. נשים לב שזהו מרטינגל כי

$$E\left[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] = E\left[E\left[\eta \mid \mathcal{F}_n\right] \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] = E\left[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] = X_{n-1}$$

לפי משפט ההתכנסות של לוי:

1. $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ אינטגרבילים במידה שווה
2. קיים $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ כמעט תמיד ואינטגרבילי.
3. $X_n \overset{\mathcal{L}^1}{\to} X_\infty$
4. $X_\infty = E\left[\eta \mid \mathcal{F}_\infty\right]$

במקרה שלנו $\eta \in \mathcal{F}_\infty$ ולכן $X_\infty = E\left[\eta \mid \mathcal{F}_\infty\right] = \eta$. בנוסף $\eta \in T_\infty$ ולכן ηבלתי תלוי ב$\mathcal{F}_n$ לכל n, מה שאומר ש $X_n = E\left[\eta \mid \mathcal{F}_n\right] = E\left[\eta\right]$.
סה"כ קיבלנו ש $X_n = E\left[\eta\right] \to X_\infty = \eta$ ולכן $\eta = E\left[\eta\right]$ כמעט תמיד, וזה מוכיח את הטענה.

<u>משפט (זהות וואלד):</u> נניח כי $X_1,^\perp\ldots,X_n^\perp,\ldots$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות ו־$X_i \in \mathcal{L}^1$.

נסמן $S_n = X_1+\cdots+X_n$, ו־$\mathcal{F}_n = \sigma\left(X_1,\ldots X_n\right)$. יהי T זמן עצירה לפי $\mathcal{F}_n$, עם

$E\left[T\right] < \infty$. אזי מתקיים $E\left[S_T\right] = E\left[X_1\right]E\left[T\right]$.

<u>הוכחה:</u> ראשית, ניזכר כי למשתנה בדיד X מתקיים:

$$E\left[X\right] = \sum_{k=1}^\infty k\cdot P\left(X=k\right) = \sum_{i=1}^\infty P\left(X=k\right)\sum_{j=1}^k 1 = \sum_{j=1}^\infty\sum_{k=j}^\infty P\left(X=k\right) = \sum_{j=1}^\infty P\left(X \geq j\right)$$

לכן, אצלנו $E\left[T\right] = \sum_{k=1}^\infty P\left(T \geq k\right)$.
נביט בזמן העצירה החסום $T \wedge n$, ובמרטינגל $S_n - n\mu = X_1+\cdots+X_n - n\mu$. לפי משפט הדגימה האופטימלית של Doob:

$$E\left[S_{T\wedge n}\right] = E\left[T\wedge n\right]\mu$$

ראשית, $T\wedge n$ מונוטוני עולה, ולכן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית מתקיים

$$E\left[T\wedge n\right]\mu \to E\left[T\right]\mu$$

כעת נרצה להשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת על $S_{T\wedge n}$. לשם כך, נשים לב שמתקיים

$$\left|S_{T\wedge n}\right|\leq\sum_{i=1}^{\infty}\left|X_{i}\right|\cdot1_{\{T\wedge n\geq i\}}\leq\sum_{i=1}^{\infty}\left|X_{i}\right|\cdot1_{\{T\geq i\}}$$

את התוחלת של המ"מ האחרון נחסום:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\left|X_{i}\right|\cdot1_{\{T\geq i\}}\right]=\sum_{i=1}^{n}E\left[\left|X_{i}\right|1_{\{T\geq i\}}\right]=\sum_{i=1}^{n}E\left[E\left[\left|X_{i}\right|\cdot1_{\{T\geq i\}}\mid\mathcal{F}_{i-1}\right]\right]$$

נשים לב ש־$\{T\geq i\}=\{T\leq i-1\}^{c}\in\mathcal{F}_{i-1}$, ולכן:

$$\begin{aligned}= & \sum_{i=1}^{n}E\left[1_{\{T\geq i\}}E\left[\left|X_{i}\right|\mid\mathcal{F}_{i-1}\right]\right]=\sum_{i=1}^{n}E\left[1_{\{T\geq i\}}E\left[\left|X_{i}\right|\right]\right]=\\ & \sum_{i=1}^{n}E\left[\left|X_{i}\right|\right]E\left[1_{\{T\geq i\}}\right]=E\left[\left|X_{1}\right|\right]\sum_{i=1}^{n}P\left(T\geq i\right)\end{aligned}$$

כעת, נשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית על $\sum_{i=1}^{n}\left|X_{i}\right|\cdot1_{\{T\geq i\}}$, ונקבל כי

$$E\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left|X_{i}\right|\cdot1_{\{T\geq i\}}\right]=E\left[\left|X_{1}\right|\right]\sum_{i=1}^{\infty}P\left(T\geq i\right)=E\left[\left|X_{1}\right|\right]E\left[T\right]<\infty$$

לסיכום, חסמנו את $\left|S_{T\wedge n}\right|$, ולכן לפי משפט ההתכנסות הנשלטת:

$$E\left[S_{T}\right]=E\left[X_{1}\right]E\left[T\right]$$

2 תרגילים

<u>תרגיל 1:</u> **<u>בורל קנטלי</u>**

יהיו $X_{1}^{\perp},X_{2}^{\perp},\ldots$ מ"מ ב"ת עם המתפלגים $N\left(0,1\right)$.

1. האם כמעט תמיד קיים N (מקרי) שעבורו

$$\forall n>N:\ \max\left\{\left|X_{n^{2}+1}\right|,\ldots,\left|X_{n^{2}+2n}\right|\right\}>5$$

2. האם כמעט תמיד קיים N (מקרי) שעבורו

$$\forall n>N:\ \max\left\{\left|X_{n^{2}+1}\right|,\ldots,\left|X_{n^{2}+20}\right|\right\}>5$$

פתרון:

1. נגדיר

$$A_n = \left\{\omega \mid \max\left\{\left|X_{n^2+1}(\omega)\right|,\ldots,\left|X_{n^2+2n}(\omega)\right|\right\} > 5\right\}$$

לכן

$$A_n^c = \left\{\omega \mid \left|X_{n^2+1}(\omega)\right| \le 5,\ldots,\left|X_{n^2+2n}(\omega)\right| \le 5\right\}$$

כיוון שהמשתנים המקריים בלתי־תלויים,

$$P\left(A_n^c\right) = \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-5}^{5} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du}_{0<\mu<1}\right)^{2n} = \mu^{2n}$$

ניקח את $A_{\text{i.o.}}$ עבור A_n^c, כלומר

$$A_{\text{i.o.}} = \left\{\omega \mid \#\left\{n \mid \omega \in A_n^c\right\} = \infty\right\}$$

לפי למת בורל־קנטלי 1, כיוון ש־$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n^c\right) < \infty$, מתקיים $P\left(A_{\text{i.o.}}\right) = 0$.
ניקח $\omega \notin A_{\text{i.o.}}$. לכן קיים $N(\omega)$ כך שלכל $n \ge N(\omega)$, $\omega \notin A_n^c$. לכן

$$\forall n \ge N(\omega) : \max\left\{\left|X_{n^2+1}(\omega)\right|,\ldots,\left|X_{n^2+2n}(\omega)\right|\right\} > 5$$

ולכן הטענה נכונה.

2. נגדיר A_n באופן דומה; הם אכן יהיו בלתי תלויים, כי ה־X_n־ים המופיעים בהם שונים לכל $n > 10$. הפעם נקבל $P\left(A_n^c\right) = \mu^{20}$. לכן טור ההסתברויות מתבדר.
בסך הכל, לפי למת בורל־קנטלי 2, $P\left(A_{\text{i.o.}}\right) = 1$, ואז הטענה לא תהיה נכונה.

תרגיל 2:

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת המתפלגים $N(0,1)$.

1. האם $\sqrt{2\ln n} < |X_n|$ כמעט תמיד?
2. האם $\sqrt{3\ln n} < |X_n|$ כמעט תמיד?
3. האם $|X_n| < \frac{1}{n}$ כמעט תמיד?
4. האם $|X_n| < \frac{1}{n^2}$ כמעט תמיד?

פתרון:

1. נבדוק את המאורע

$$A_n=\left\{\omega\mid |X_n(\omega)|>\alpha\sqrt{\ln n}\right\}$$

נשתמש בנוסחא:

$$P(N(0,1)\geq x)\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(x+\frac{1}{x}\right)}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

אצלנ

$$\begin{aligned}P(N(0,1)\geq x)&\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(x+\frac{1}{x}\right)}e^{-\frac{x^2}{2}}=\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\alpha\sqrt{\ln n}+\frac{1}{\alpha\sqrt{\ln n}}\right)}e^{-\frac{(\alpha\sqrt{\ln n})^2}{2}}\underset{\alpha=\sqrt{2}}{\sim}\frac{c}{n\sqrt{\ln n}}\end{aligned}$$

מטעמי סימטריה:

$$P(|N(0,1)|\geq x)\sim\frac{2c}{n\sqrt{\ln n}}$$

המ"מ בלתי תלויים והטור מתבדר, ולכן לפי החלק השני בבורל קנטלי $P(A_{i.o.})=1$.
כלומר:

$$\forall\omega\in A_{i.o.}\exists\{n_k(\omega)\}\,\forall k:\omega\in A_{n_k}\Rightarrow|X_{n_k}(\omega)|>\sqrt{3\ln n_k}$$

ולכן התשובה היא כן.

2. כעת $\alpha=\sqrt{3}$; נשתמש בחסם מלעיל:

$$P(N(0,1)\geq x)\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

אצלנו:

$$P\left(X_n\geq\alpha\sqrt{\ln n}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha\sqrt{\ln n}}e^{-\frac{\alpha^2\ln n}{2}}=\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi\ln n}}n^{-\frac{\alpha^2}{2}}\underset{\alpha\geq\sqrt{2}}{\leq}\frac{c}{n^{\frac{3}{2}}}$$

מטעמי סימטריה:
לפי למת בורל-קנטלי 1, $P(A_{\text{i.o.}})=0$. לכן, בהינתן $\omega\in A^c_{\text{i.o.}}$, קיים $N(\omega)$ כך שלכל $n\geq N(\omega)$, $\omega\notin A_n$. לכן והתשובה היא לא.

3. נבדוק את המאורע

$$A_n=\left\{\omega\mid |X_n(\omega)|<\frac{1}{n^\beta}\right\}$$

לפי הנוסחה

$$P(A_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^{-\beta}}^{n^{-\beta}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

מתקיים

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}n^{\beta}}=\frac{2}{2\sqrt{2\pi}n^{\beta}}\leq P\left(A_{n}\right)\leq\frac{2}{\sqrt{2\pi}n^{\beta}}$$

אצלנו $\beta = 1$, ולכן ניעזר באי־השוויון השמאלי. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right)$ מתבדר, וכן המאורעות A_n בלתי־תלויים (כי X_n בלתי־תלויים).
לכן, לפי למת בורל־קנטלי 2, $P\left(A_{\text{i.o.}}\right)=1$.
יהי $\omega \in A_{\text{i.o.}}$; אזי קיימת סדרה n_k שעבורה $\left|X_{n_k}\left(\omega\right)\right| < \frac{1}{n}$.

4. אם $\beta = 2$, הטור הנ"ל מתכנס; לכן, לפי למת בורל־קנטלי 1, $P\left(A_{\text{i.o.}}\right)=0$.
יהי $\omega \in A^c_{\text{i.o.}}$; אזי קיים $N\left(\omega\right)$ כך שלכל $n \geq N\left(\omega\right)$, $\omega \notin A_n$. לכן

$$\forall n\geq N\left(\omega\right):\left|X_{n}\left(\omega\right)\right|\geq\frac{1}{n^{2}}$$

ולכן התשובה היא לא.

<u>תרגיל 3:</u>

תהי X_n סדרה של מ"מ שמתכנסת בהסתברות ל X. צ"ל תת סדרה n_k כך ש $X_{n_k} \to X$ כמעט תמיד.

<u>פתרון:</u>

לפי הגדרה $P(|X-X_n|>\varepsilon)\to 0$ לכל $\varepsilon > 0$. לכן לכל k טבעי קיים n_k כך ש־ $P(|X-X_{n_k}|>\frac{1}{2^k})<\frac{1}{2^k}$. זו תת הסדרה המבוקשת, נראה זאת:
נגדיר $A_k := \{\omega\in\Omega||X(\omega)-X_{n_k}(\omega)|>\frac{1}{2^k}\}$. נשים לב שלפי הבחירה $P(A_k)<\frac{1}{2^k}$, לכן $\sum_1^\infty P(A_k)<\infty$.
לפי למת בורל קנטלי $P(A_{i.o.})=0$, כלומר $P(A^c_{i.o.})=1$. נרשום את $A^c_{i.o.}$ במפורש:

$$\begin{aligned}&A_{i.o.}^{c}=\left\{\omega\in\Omega|\#\{k\mid|X(\omega)-X_{n_{k}}(\omega)|>\frac{1}{2^{k}}\right\}=\\&\left\{\omega\in\Omega\mid\exists k_{0}\forall k>k_{0}:|X(\omega)-X_{n_{k}}(\omega)|<\frac{1}{2^{k}}\right\}\subseteq\\&\subseteq\{\omega\in\Omega\mid\exists k_{0}\forall k>k_{0}:X_{n_{k}}(\omega)\to X(\omega)\}\end{aligned}$$

לכן

$$1=E\left[e^{iN(0,\sigma^{2})}\right]P\left(A_{i.o.}^{c}\right)\leq P\left(\{\omega\in\Omega|\exists k_{0}\forall k>k_{0}:X_{n_{k}}(\omega)\to X(\omega)\}\right)$$

מה שאומר ש

$$P\left(\{\omega\in\Omega|\exists k_{0}\forall k>k_{0}:X_{n_{k}}(\omega)\to X(\omega)\}\right)=1$$

ולכן $X_{n_k}\to X$ כמעט תמיד.

<u>הסתברות ותורת המספרים (מספרים נורמליים):</u>

יהי $x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{b^i}=0.x_1x_2\ldots_b$ ייצוג של מספר x בבסיס b: $x_i\in\{0,1,\ldots,b-1\}$.
נרצה להבין את ההתפלגות של x_i. מתקיים

$$\begin{aligned}P\left(x_1=a_1,\ldots x_n=a_n\right)&=P\left(\frac{a_1}{b}+\cdots+\frac{a_n}{b^n}\leq x\leq\frac{a_1}{b}+\cdots+\frac{a_n+1}{b^n}\right)\\&=\frac{1}{b^n}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{b}=\prod_{i=1}^{n}P\left(x_i=a_i\right)\end{aligned}$$

ולכן המשתנים ב"ת.
כעת, $1_{\{x_i=a_i\}}$ אינטגרבילית, ולכן לפי החוק החזק של מספרים גדולים:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1_{\{x_i=a_i\}}}{n}\overset{a.s.}{\to}\frac{1}{b}$$

זה נכון לכל בסיס, ובפרט לבסיס b^m, $b\mapsto b^m$, כלומר אם $x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{b^{mi}}=0.x_1x_2\ldots_{b^m}$
כאשר הפעם $x_i\in\{0,1,\ldots,b^m-1\}$, אז שוב x_i ב"ת ומתקיים

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1_{\{x_i=a_i\}}}{n}\overset{a.s.}{\to}\frac{1}{b^m}$$

על ידי הזזה נרשום $x=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{X_{mn+k}}{b^{mn+k}}$, ואז נקבל

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1_{\{x_{mi+1}=a_1,\ldots,x_{mi+m}=a_m\}}}{n}\overset{a.s.}{\to}\frac{1}{b^m}$$

זו ההסתברות שהסדרה $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ תופיע ברצף אינסופי (בלי רווחים). אנו רוצים את ההסתברות שהיא תופיע אינסוף פעמים, אולי עם רווחים.
נזיז את האינדקס בנוסחא לעיל ב־$0\leq j\leq m-1$, ונסכום על ה־j האלה:

$$\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1_{\{x_{mi+j+1}=a_1,\ldots,x_{mi+j+m}=a_m\}}}{nm}\overset{a.s.}{\to}\frac{1}{b^m}$$

יהי N כך ש־$n=\left\lfloor\frac{N}{m}\right\rfloor$. אז מתקיים $\frac{N}{nm}\overset{N\to\infty}{\to}1$, ולכן אם נציב $k=mi+j$ נקבל סה"כ:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{N}{nm}\frac{1_{\{x_{k+1}=a_1,\ldots,x_{k+m}=a_m\}}}{N}\overset{a.s.}{\to}\frac{1}{b^m}$$

וזה מה שצריך להוכיח.

אינטגרלים והתכנסות

תרגיל 1: תהי $f \in \mathcal{L}^1$, ויהי $x = 0.x_1 x_2 \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \in [0,1)$, $x_i \in \{0,1,2\}$, ונגדיר

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{3^i}$$

הוכיחו שעבור כמעט כל $x \in [0,1)$ מתקיים

$$f_n(x) = 3^n \int_{\xi_n}^{\xi_n + 3^{-n}} f(u)\, du \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

פתרון:

ניעזר במשפט ההתכנסות למרטינגלים של לוי: נניח $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$, $f \in \mathcal{L}^1$. אזי

$$\mathrm{E}(f \mid \mathcal{F}_n) \overset{\text{a.s.},\mathcal{L}^2}{\longrightarrow} \mathrm{E}(f \mid \mathcal{F}_\infty)$$

בתרגיל שלנו, נגדיר

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(\left\{\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right) \mid 0 \le k < 3^n\right\}\right)$$

נרצה להוכיח שלכל n, $f_n(x) = \mathrm{E}(f \mid \mathcal{F}_n)$. מספיק לבדוק על היוצרים של $\mathcal{F}_n$, כלומר על קטעים מהצורה $\Delta_k = \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right) \in \mathcal{F}_n$. נכתוב

$$k = x_1 + x_2 \cdot 3 + \cdots + x_n \cdot 3^{n-1}$$

נקבל

$$\int_{\Delta_k} f_n(x)\, dx = \int_{\Delta_k} \left(3^n \int_{\xi_n}^{\xi_n + 3^{-n}} f(u)\, du\right) dx$$

כיוון ש־$x \in \Delta_k$, מתקיים $\xi_n = \frac{k}{3^n}$, ולכן קטע האינטגרציה של האינטגרל הפנימי הוא Δ_k.
לכן,

$$\int_{\Delta_k} f_n(x)\, dx = \int_{\Delta_k} \left(3^n \int_{\Delta_k} f(u)\, du\right) dx \underset{Fubini}{=} \int_{\Delta_k} \left(3^n \int_{\Delta_k} f(u)\, dx\right) du = \int_{\Delta_k} f(u)\, du$$

ולכן באמת $f_n(x) = \mathrm{E}(f \mid \mathcal{F}_n)$. לכן סיימנו.

תרגיל 2:

מצא

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}+\cdots+x_n^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{n}}\right)dx_1\ldots dx_n$$

<u>פתרון:</u>

נגדיר את מרחב ההסתברות $\Omega := [-1,1]$ עם המידה: $\mu = \frac{1}{2}\lambda$.

נתבונן במשתנים המקריים $X_1, \cdots, X_n \sim U(-1,1)$. נגדיר גם $Y_i := X_i^{-1/3}$. לבסוף נגדיר $S_n := Y_1 + \cdots + Y_n$.

כעת נשים לב שהביטוי הנ"ל הוא בעצם התוחלת של $E\left[\cos\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]$.

נרצה להשתמש בהתכנסות החלשה לפי משפט הגבול המרכזי ולומר ש == $E\left[\cos(\frac{S_n}{\sqrt{n}})\right]$ $E\left[\cos(N)\right]$כאשר N הוא משתנה מקרי נורמלי.

נחשב את התוחלת והשונות של Y:

$$E[Y_i]=\frac{1}{2}\int Y_i(x)dx=\frac{1}{2}\int x^{-1/3}dx=\frac{1}{2}\frac{3}{2}[x^{2/3}]_{-1}^{1}=0$$

$$E\left[Y_i^2\right]=\frac{1}{2}\int Y_i^2(x)dx=\frac{1}{2}\int x^{-2/3}dx=\frac{1}{2}3[x^{1/3}]_{-1}^{1}=3$$

$$Var\left(Y_i\right)=E\left[Y_i^2\right]-E\left[Y_i\right]^2=3\Rightarrow\sigma=\sqrt{3}$$

$Y_1,\cdots,Y_n$ הם משתנים שווי התפלגות בלתי תלויים ולכן לפי משפט הגבול המרכזי: $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d}$ $N\left(0,\sigma^2\right)$. $\cos$ היא פונקציה רציפה וחסומה ולכן לפי התכנסות חלשה

$$E\left[\cos\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]\to E\left[\cos\left(N\left(0,\sigma^2\right)\right)\right]$$

ולכן הגבול הוא:

$$L=E\left[\cos\left(N\left(0,\sigma^2\right)\right)\right]=E\left[\frac{e^{iN\left(0,\sigma^2\right)}+e^{-iN\left(0,\sigma^2\right)}}{2}\right]=\frac{1}{2}(E\left[e^{iN\left(0,\sigma^2\right)}\right]+E\left[e^{-iN\left(0,\sigma^2\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\varphi_{N(0,\sigma^2)}(1)+\varphi_{N(0,\sigma^2)}(-1)\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}(\sigma^2)}+e^{-\frac{1}{2}(-\sigma)^2}\right)=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2}=e^{-\frac{3}{2}}$$

<u>תרגיל 3:</u>

חשב את הגבול $L=\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{n}}\right)dx_1\ldots dx_n$.

<u>פתרון</u>: נתייחס ל-x_i כמשתנים מקריים X_i אחידים על מרחב ההסתברות $[-1,1]$ עם מידת לבג. מתקיים $E\left[X_i\right]=0$ ו-$E\left[X_i^2\right]=\frac{1}{3}$. לכן $Var\left(X_i\right)=\frac{1}{3}$ ולכן $\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}$, בפרט סופית. לפי משפט הגבול המרכזי:

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{w}N\left(0,\sigma^2\right)$$

כלומר יש התכנסות חלשה. היות ש־$\cos$ פונקציה רציפה, נקבל

$$\begin{aligned} L &= E\left[\cos\left(N\left(0,\sigma^2\right)\right)\right] = E\left[\frac{e^{iN\left(0,\sigma^2\right)}+e^{-iN\left(0,\sigma^2\right)}}{2}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left(\varphi_{N(0,\sigma^2)}(1)+\varphi_{N(0,\sigma^2)}(-1)\right) = e^{-\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

<u>תרגיל 4:</u>

חשבו את

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \int_{A_n} x_1 \dots x_n dx_1 \dots dx_n$$

כאשר

$$A_n = \left\{(x_1,\dots,x_n)\in[0,1]^n \mid 3\left(x_1+\cdots+x_n\right) > 2n+\sqrt{n}\right\}$$

<u>פתרון:</u> ראשית, נבצע החלפת משתנים $y_i = x_i^2$. נקבל את התחום

$$A'_n = \left\{(y_1,\dots,y_n)\in[0,1]^n \mid 3\left(y_1^{\frac{1}{2}}+\cdots+y_n^{\frac{1}{2}}\right) > 2n+\sqrt{n}\right\}$$

לאחר החלפת המשתנים, נקבל

$$2^n\int_{A_n} x_1\dots x_n dx_1\dots dx_n = \int_{A'_n} dy_1\dots dy_n = \int_{[0,1]^n} I\left(A'_n\right) dy_1\dots dy_n = P\left(A'_n\right)$$

נסתכל על $([0,1],\lambda,\mathbb{B}([0,1]))$, כאשר λ היא מידת לבג, ונגדיר את $Y_1,\dots,Y_n$ להיות המשתנים המקריים במרחב זה המייצגים את הקואורדינטות של $(y_1,\dots,y_n)$. לכן $Y_1,\dots,Y_n$ הם משתנים מקריים בלתי־תלויים, המתפלגים בהתפלגות אחידה ב־$[0,1]$.
נשים לב כי

$$\mathrm{E}\left(Y_i^{\frac{1}{2}}\right) = \int_0^1 y_i^{\frac{1}{2}} dy_i = \left.\frac{2}{3}y_i^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{2}{3}$$

ולכן

$$A'_n = \left\{(y_1,\dots,y_n)\in[0,1]^n \mid \frac{\left(y_1^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left(y_n^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\right)}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{1}{3\sigma}\right\}$$

נחשב את σ:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\left(Y_i^{\frac{1}{2}}\right)^2\right) &= \mathrm{E}\left(Y_i\right) = \int_0^1 y_i dy_i = \frac{1}{2}y_i^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \sigma^2 &= \mathrm{E}\left(\left(Y_i^{\frac{1}{2}}\right)^2\right) - \mathrm{E}\left(Y_i^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

לכן האינטגרל הוא:

$$P\left(A_n'\right) = P\left(\frac{\left(Y_1^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(Y_n^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\right)}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{1}{3\sigma}\right) \overset{\text{CLT}}{\longrightarrow} 1 - \Phi\left(\frac{1}{3\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{3\sqrt{\frac{1}{18}}}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{2}\right)$$

תרגיל 5:

חשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sin\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n$$

פתרון:

נתבונן במרחב ההסתברות $\Omega = [0,1]$ עם מידת לבג. נגדיר $X_1, \cdots, X_n \sim U(0,1)$ משתנים מקרים בלתי תלוים שווי התפלגות. לפי החוק החלש של המספרים הגדולים: $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \to E[X_1]$ בהתכנסות חלשה, כלומר לכל פונקציה רציפה f מתקיים $E[f(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n})] \to E[f(E[X_1])] = f(E[X_1])$.

כעת, נשים לב ש:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sin\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n = \lim_{n\to\infty} E\left[\sin\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\right] = \sin(E[X_1])$$

ולכן $E[X_1] = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sin\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n = \sin\left(\frac{1}{2}\right)$$

תרגיל 6: יהיו $s_1, s_2, \ldots$ משתנים מקריים שעבורם $P\left(s_i = -1\right) = P\left(s_i = 1\right) = \frac{1}{2}$.
הוכיחו שהטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} s_n \ldots s_{n+k}$$

מתכנס כמעט תמיד לכל k.

פתרון:

נגדיר $T_1 = \{-1,1\}$, $T_n = \{-1,1\}^n$, $\mathcal{F}_n = T_{n+k}$. אזי $X_n = \frac{1}{n} s_n \dots s_{n+k} \in \mathcal{F}_n$. בנוסף,

$$\mathrm{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \frac{1}{n} s_n \dots s_{n+k-1} \mathrm{E}\left(s_{n+k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \frac{1}{n} s_n \dots s_{n+k-1} \mathrm{E}\left(s_{n+k}\right) =$$
$$= \frac{1}{n} s_n \dots s_{n+k-1} \left(-1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$$

לכן, המשתנים המקריים X_n הם מרטינגל הפרשים. נשים לב כי

$$E\left(X_n^2\right) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n^2} s_n^2 \dots s_{n+k}^2\right) = \frac{1}{n^2} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{E}\left(s_{n+i}^2\right) = \frac{1}{n^2}$$

לכן $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(X_n^2\right) < \infty$. לפי משפט ההתכנסות המרטינגלי ב־$\mathcal{L}^2$, המרטינגל $M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ מתכנס כמעט תמיד.
לכל k, נסמן ב־B_k את המאורע שבו הטור אינו מתכנס. לכן $P\left(B_k\right) = 0$. לכן גם

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(B_k\right) = 0$$

כלומר הטור באמת מתכנס כמעט תמיד לכל k.

<u>תרגיל 7:</u>

הוכח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \sin^3\left(2\pi 5^{n^4} x\right)$ מתכנס כמעט לכל $x \in [0,1]$.
<u>פתרון:</u> נסמן $Y_n = \sin^3(2\pi 5^{n^4} x)$, $T_n = \left\{\left[\frac{k}{5^n}, \frac{k+1}{5^n}\right] \mid 0 \leq k \leq 5^n\right\}$, $F_n = T_{k_n}$ כאשר $k_n = n^4 + n$ (בוחרים זאת דווקא כך כדי שיתקיים $n^4 \ll n^4 + n < (n+1)^4$). בנוסף, יהיו $Z_n = E[Y_n|F_n] \in F_n$, $t_n = Z_n - E[Z_n|F_{n-1}]$.
נוכיח ש־Y_n קרוב מאוד ל־Z_n, שקרוב מאוד ל־t_n. נביט בפיתוח $x = x_1 \dots {}_5$ של x בבסיס 5 ונגדיר $\xi_n = x_1 \dots x_{n_5}$. אז $E[f \mid T_n] = 5^n \int_{\xi_n}^{\xi_n + 5^{-n}} f(u) du$.
עבור החלק הראשון, מתקיים:

$$|Y_n(x) - Z_n(x)| = |Y_n(x) - E[Y_n \mid F_n]| = |Y_n - 5^{k_n} \int_{\xi_{k_n}}^{\xi_{k_n} + 5^{-k_n}} Y_n(u) du| \leq$$
$$\leq 5^{k_n} \int_{\xi_{k_n}}^{\xi_{k_n} + 5^{-k_n}} |Y_n(x) - Y_n(u)| du =$$

כעת נשתמש במשפט לגראנז':

$$= 5^{k_n} \int_{\xi_{k_n}}^{\xi_{k_n} + 5^{-k_n}} |x - u| \cdot 3 \cdot |\sin^2(2\pi 5^{n^4} x) \cdot 2\pi 5^{n^4} \cos(2\pi 5^{n^4} x)| du \leq$$
$$=\leq C \cdot 5^{k_n + n^4} \int_{\xi_{k_n}}^{\xi_{k_n} + 5^{-k_n}} |x - u| du \leq C \cdot 5^{k_n + n^4} \int_{\xi_{k_n}}^{\xi_{k_n} + 5^{-k_n}} 5^{-k_n} du =$$
$$= C \cdot 5^{k_n + n^4} \cdot 5^{-2k_n} = C \cdot 5^{n^4 - k_n} = C \cdot 5^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

החלק השני:

$$\begin{aligned}
&|t_n - Z_n| = |E[Z_n \mid F_{n-1}]| = |E[E[Y_n \mid F_n] \mid F_{n-1}]| = |E[Y_n \mid F_{n-1}]| = \\
&= |5^{k_{n-1}} \int_{\xi_{k_{n-1}}}^{\xi_{k_{n-1}}+5^{-K_{n-1}}} Y_n(u)du| = 5^{k_{n-1}}| \int_{\xi_{k_{n-1}}}^{\xi_{k_{n-1}}+5^{-k_{n-1}}} \sin^3\left(2\pi 5^{n^4} x\right) du = \\
&= 5^{k_{n-1}-n^4}| \int_{5^{n^4}\xi_{k_{n-1}}}^{5^{n^4}\xi_{k_{n-1}}+5^{n^4-k_{n-1}}} \sin^3(2\pi u)\, du| \leq \\
&\leq 5^{k_{n-1}-n^4} = 5^{-4n^3+6n^{2-3n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

גם מתקיים $|t_n| \leq |Y_n| + o(\frac{1}{n^2}) \leq 1 + o(\frac{1}{n^2}) \leq c$.
לסיכום, במקום Y_n אפשר לקחת t_n באינטגרל. האינטגרנד הוא $\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}t_n$, ומתקיים :
$E[\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}t_n|F_{n-1}] = 0$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}t_n)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^2}{n^{\frac{4}{3}}} < \infty$, לכן לפי משפט $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}t_n$ מתכנס כמעט תמיד, כדרוש.

<u>תרגיל 8:</u>

הוכיחו שהסדרה $n \in \mathbb{N}$, $\cos\left(2\pi 7^{n^3}x\right)$ היא צפופה ב־$[-1,1]$ עבור כמעט כל $x \in [0,1]$.

<u>פתרון:</u>

כיוון ש־cos היא פונקציה רציפה במ"ש, מספיק לבדוק ש $\left\{2\pi 7^{n^3}x\right\}$ צפופה ב $[0,2\pi]$,
כלומר ש־ $\left\{7^{n^3}x\right\}$צפופה ב־$[0,1]$.
נכתוב את x לפי בסיס 7: $x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x_i}{7^i}$ לכן $7^{n^3}x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x_i}{7^{i+n^3}} = 0.x_{n^3}x_{n^3+1}x_{n^3+2}\cdots$.
יהי $a \in [0,1]$ ותהי U סביבה פתוחה שלו. נרשום את a לפי בסיס 7: $a = 0.a_1a_2a_3\cdots$.
כעת, בה"כ $U = (0.a_1a_2\cdots a_k,\ 0.a_1a_2\cdots(a_k+1))$
(אם הסדרה a_i היא 0 לבסוף אז אסור לרשום כך כי $a \notin U$ אבל אז a רציונלי ואפשר להניח שהוא אי רציונלי כי הם צפופים ב$[0,1]$)
כעת, ידוע שמתקיים

$$\sum_{n=1}^{n}\frac{1_{(x_{n^3+1}=a_1,\ldots,x_{n^3+k}=a_k)}}{N} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{7^k}$$

כלומר כמעט לכל xיש סיכוי חיובי שהסדרה $\left\{2\pi 7^{n^3}x\right\}$נמצאת ב־$U$.
בפרט יש איברים בסדרה הנ"ל שנמצאים ב־U.
זה נכון לכל $a \in [0,1]$ (אי רציונלי) ולכל סביבה שלו U, לכן $\left\{2\pi 7^{n^3}x\right\}$ צפופה ב$[0,1]$,
מה שמוכיח את הטענה.

<u>תרגיל 9:</u>

יהיו $X_1^{\perp},\ldots$ המתפלגים ברנולי: $X_i = \begin{cases} 1 & p = \frac{1}{2} \\ -1 & q = \frac{1}{2}\end{cases}$. המשתנים מתארים קפיצות שלמות על הציר. הוכח כי ההסתברות לעבור באפס אינסוף פעמים היא 1 כמעט תמיד.

פתרון:
נסמן $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ו־$F_n = \sigma\left(X_n, \dots\right)$. נגדיר

$$A_{c_1} = \left\{\omega \mid \sup\left(\frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}}\right) \geq c\right\}$$
$$A_{c_2} = \left\{\omega \mid \inf\left(\frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}}\right) \leq -c\right\}$$

אז $A_{c_1}, A_{c_2} \in F_\infty$, ולכן לפי חוק קולמוגורב $0-1$, נקבל $P\left(A_{c_1}\right), P\left(A_{c_2}\right) \in \{0,1\}$.
אך מתקיים:

$$P\left(A_{c_1}\right) \geq \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > c\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) > 0$$

ולכן $P\left(A_{c_1}\right) = 1$ ובדומה $P\left(A_{c_2}\right) = 1$. לכן גם $A_c = A_{c_1} \cap A_{c_2}$ מקיים $P\left(A_c\right) = 1$.
לכן, כמעט לכל ω קיימות n_k, m_k כך ש־$S_{n_k} \to \infty, S_{m_k} \to -\infty$.
מתוך הסדרות הללו ניתן לבנות סדרה שתחליף סימנים אינסוף פעמים, ולכן (לפי הבנייה של התהליך) תעבור באפס אינסוף פעמים.

תרגיל 10:

יהיו Y_k משתנים מקרים ב"ת כך ש־ $P(Y=1) = P(Y=-1) = \frac{1}{2}$. נגדיר $S_n := \sum_{i=1}^n Y_i$, $\tau_a := \min\{n|S_n = a\}$. ספר מה שאתה יכול על המקרה הזה.
פתרון:
כבר ראינו בשאלה הקודמת ש־S_n יעבור אינסוף פעמים ב־0 כמעט תמיד ובדרך ראינו שהוא יגיע לכל מספר (גדול כרצוננו) לכן בהכרח הוא יגיע גם ל־a אחרי מספר סופי של צעדים. כלומר ־ τ_aסופי כמעט תמיד.
כעת נניח ש־$E[\tau_a] < \infty$. ראינו ש־ $E[S_{\tau\wedge n}] = E[\tau \wedge n]E[Y_i] = 0$(כי $E[Y_i] = 0$). לפי זהות וואלד $E[S_{\tau_a}] = E[\tau_a]E[Y_1] = 0$, לכן $S_{\tau_a(\omega)}(\omega) = a$ כלומר $E[S_\tau] = a$. מכאן $a = 0$. לכן לכל $a \neq 0$, $E[\tau_a] = \infty$.
נגדיר $\tau_{a,b} = \min\{n|S_n = a, b\}$. נחפש את $\alpha := P(\tau_{a,b} = \tau_a)$. ברור ש־ $\tau_{a,b}$ סופי כמעט תמיד ולכן ניתן להגדיר $S_{\tau_{a,b}}$. נשים לב ש $|S_{\tau_{a,b}\wedge n}(\omega)| \leq a + b$. ראינו כבר שמתקיים

$$E[S_{\tau_{a,b}}] = \lim_{n\to\infty} E[S_{\tau_{a,b}\wedge n}] = 0$$

אבל $E[S_{\tau_{a,b}}] = a\alpha - b(1-\alpha) = 0$, לכן $\alpha = \frac{b}{a+b}$ כלומר $P(\tau_{a,b} = \tau_a) = \frac{b}{a+b}$.
כעת נרצה לחשב את $E(\tau_{a,b})$. מתקיים $E[S_n^2] = \sum_{i=1}^n E[X_i^2]$, ולכן ממשפט ההתכנסות המונוטונית

$$E[\tau_{a,b}] = \lim_{n\to\infty} E[\tau_{a,b}\wedge n] = \lim_{n\to\infty} E[S^2_{\tau_{a,b}\wedge n}] = E[S^2_{\tau_{a,b}}] = a^2\frac{b}{a+b} + b^2\frac{a}{a+b} = ab$$

סה"כ:

1. $P(\tau_{a,b} = \tau_a) = \frac{b}{a+b}$

2. $E[\tau_{a,b}] = ab$
3. $E[\tau_a] = \infty$
4. $P\left(S_n i.o\right). = 1$ מתרגיל קודם
5. $\tau_a < \infty$ כמעט תמיד