אינפי 3 תרגיל 9

שאלה 1

הוכח כי המשוואות הבאות מגדירות את z כפונקציה של x, y בסביבת הנקודה $a = (a_1, a_2, a_3)$ וחשב את $z_x(a_1, a_2), z_y(a_1, a_2), z_{xy}(a_1, a_2)$.

1.

$$F(x, y, z) = y^2 + xy + z^2 - e^z - 4 = 0$$

$$a = (0, e, 2)$$

2.

$$xz + y \ln z + x^2 = 0$$

$$a = (-2, 0, 2)$$

שאלה 2

נתונה משוואה $\sqrt{x^2 + y^5 + \cos z - 1} = z^4 + 1$.

1. האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1, 0, 0)$ את x כפונקציה של y, z?
2. האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1, 0, 0)$ את y כפונקציה של x, z?
3. האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1, 0, 0)$ את z כפונקציה של x, y?

שאלה 3

1. נניח כי המשוואה $F(x, y, z) = 0$ מקיימת את תנאי הפונקציה הסתומה לפי כל אחד מן המשתנים בנקודה $a = (a_1, a_2, a_3)$ ולכן מגדירה פונקציות

$$x = x(y, z), \quad y = y(x, z), \quad z = z(x, y)$$

מצא את (המספר)

$$\frac{\partial x}{\partial y}(a_2, a_3) \cdot \frac{\partial y}{\partial z}(a_1, a_3) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(a_1, a_2)$$

שאלה 4

תהי פונקציה $F(x, y)$ המוגדרת על תחום D ובעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר 2 בתחום D. נתונה נקודה $(x_0, y_0) \in D$ כך שמתקיים

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_x(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0, \quad F_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$$

הוכח כי $F(x, y) = 0$ אינה מגדירה את x כפונקציה של y בסביבת הנקודה (x_0, y_0). (רמז: הוכח שהמשוואה מגדירה את y כפונקציה של x ומצא תכונות של פונקציה זו).

שאלה 5

סעיף א

הוכיחו כי קיים כדור כלשהוא $B \subseteq \mathbb{R}^4$ שמרכזו ב $(2,1,-1,-2)$ וקיימות פונקציות $u, v : B \to \mathbb{R}$ הגזירות ברציפות על B. כך ש

$$u(2,1,-1,-2) = 4, \quad v(2,1,-1,-2) = 3$$

ולכל נקודה $(x,y,z,w) \in B$ מתקיים

$$u^2 + v^2 + z^2 = 29, \quad \frac{u^2}{x^2} + \frac{v^2}{y^2} + \frac{w^2}{z^2} = 17$$

סעיף ב

מצא את

$$u_x(2,1,-1,-2), \quad v_x(2,1,-1,-2), \quad u_z(2,1,-1,-2), \quad v_z(2,1,-1,-2)$$

שאלה 6

נתונה מערכת משוואות

$$\begin{aligned} f(x,u,v) &= 0 \\ g(y,u,v) &= 0 \\ h(z,u,v) &= 0 \end{aligned}$$

עבור $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5$ נסמן

$$A_a = \begin{pmatrix} h_u(a_3,a_4,a_5) & h_v(a_3,a_4,a_5) \\ g_u(a_2,a_4,a_5) & g_v(a_2,a_4,a_5) \end{pmatrix}, \quad B_a = \begin{pmatrix} f_u(a_1,a_4,a_5) & f_v(a_1,a_4,a_5) \\ g_u(a_2,a_4,a_5) & g_v(a_2,a_4,a_5) \end{pmatrix}$$

הוכח כי אם

$$|B_a| h_z(a_3,a_4,a_5) \neq 0$$

אז המערכת מגדירה את z כפונקציה של x, y בסביבת a ומתקיים

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a_1,a_2) = \frac{|A_a| f_z(a_1,a_4,a_5)}{|B_a| h_z(a_3,a_4,a_5)}$$