חורף תשע"ד

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 7: פונקציות אלמנטריות (המשך)

1. הפונקציה z^α מוגדרת ע"י $z = e^{\alpha \ln z}$, כאשר α מספר ממשי ו

$\ln z = \ln|z| + i\arg(z) = \ln r + i(\varphi + 2\pi k),\ k = 0, \pm1, \pm2, ...$ עבור $z = re^{i\varphi}$

(באופן דומה מגדירים את הפונקציה המעריכית a^z עבור a מרוכב).

(א) חשבו את i^i.

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i[\ln|i| + i\arg(i)]} = e^{i[\ln 1 + i(\pi/2 + 2\pi k)]} = e^{-(\pi/2 + 2\pi k)}$$

(ב) חשבו את $\ln i^i$

מאחר ו i^i ממשי נקבל

$\ln i^i = \ln|i^i| + i\arg(i^i) = -(\pi/2 + 2\pi k) + 2\pi m i$ כאשר k, m מספרים שלמים.

(שימו לב כי באופן כללי $\ln i^i \neq i \ln i$. שוויון מתקבל עבור ענפים של $\ln i^i$ עם $m = 0$).

2. (א) הוכיחו כי $\ln z^\alpha = \alpha \ln z$ לכל α ממשי

$$\ln z^a = \ln|z^\alpha| + i\arg(z^\alpha) = \ln|z|^\alpha + i\alpha\arg(z) = \alpha(\ln|z| + i\arg(z)) = \alpha \ln z$$

(ב) פתרו את המשוואה $e^z + 1 = 0$

נרשום $e^z = -1$ ולכן $\ln e^z = z = \ln(-1) = i(\pi + 2\pi k)$

3. הוכיחו כי לכל α, β ממשיים

(א) $z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta$

$$z^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)\ln z} = e^{\alpha \ln z + \beta \ln z} = e^{\alpha \ln z} e^{\beta \ln z} = z^\alpha z^\beta$$

(ב) $(z^\alpha)^\beta$

$$(z^\alpha)^\beta = (e^{\alpha \ln z})^\beta = e^{\beta \ln e^{\alpha \ln z}} = e^{\beta \ln z^\alpha} = e^{\beta\alpha \ln z} = z^{\alpha\beta}$$

(ג) $z^{-\alpha} = 1/z^\alpha$

$$z^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln z} = 1/e^{\alpha \ln z} = 1/z^\alpha$$