תרגיל 5 אינפי 1 למדמ"ח

עוד על נגזרת

1. חשבו את הנגזרות $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ עבור הפונקציות הבאות. אם לא נאמר אחרת בטאו את התשובה לפי x.

(א) $y = \sqrt[5]{2-3x}$

תשובה: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{5}(2-3x)^{-\frac{4}{5}} \cdot (-3)$

(ב) $y = \cos\sqrt{x}$

תשובה: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

(ג) $y = e^{-x^2}$

תשובה: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{-x^2} \cdot (-2x)$

(ד) $y = \sin(2x)\cos^2(3x)$

תשובה: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\cos(2x)\cos^2(3x) - 6\sin(2x)\cos(3x)\sin(3x)$

(ה) $y = \frac{1}{u} \quad u = 3v+4 \quad v = \frac{1}{x+1}$

תשובה:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{u^2} \cdot 3 \cdot (-\frac{1}{(x+1)^2}) \\ &= \frac{1}{(3v+4)^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2(\frac{3}{x+1}+4)^2}\end{aligned}$$

(ו) $y = \frac{2t+3}{t+2} \quad x = \frac{2t+1}{t+2}$ (בטאו את התשובה לפי t ולפי x)

תשובה: לפי t זה קל:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{2(t+2)-(2t+3)}{(t+2)^2}}{\frac{2(t+2)-(2t+1)}{(t+2)^2}} = \frac{2t+4-2t-3}{2t+4-2t-1} = \frac{1}{3}$$

היות שאין תלות ב t ולכן זו גם התשובה לפי x.

(ז) $y = \ln t \quad x = e^t$ (בטאו את התשובה לפי t ולפי x)

תשובה: לפי t זה קל:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{1}{t}}{e^t} = \frac{1}{te^t}$$

לפי x זה גם לא קשה מדי: $t = \ln x$ ולכן

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\ln x e^{\ln x}} = \frac{1}{x\ln x}$$

2. גוף נע במישור לפי המשוואות

$$y = \sqrt{t} \quad x = \frac{1}{1-t^2}$$

מצאו את שיפוע הנתיב שבו הוא נע (מבוטא לפי t)
תשובה: השיפוע שלו הוא $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{-\frac{1}{(1-t^2)^2}(-2t)} = \frac{(1-t^2)^2}{4t\sqrt{t}}$$

3. באילו נקודות הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

היא גזירה? חשבו את נגזרתה בכל נקודה בה היא גזירה.
תשובה: בנקודות $x \notin \mathbb{N}$ הפונקציה גזירה וזה בגלל שלכל Δx אינפיניטיסימל

$$f(x + \Delta x) = 0$$

ולכן

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

ולכן

$$f'(x) = 0$$

בנקודות $x \in \mathbb{N}$ הפונקציה לא גזירה משום שלכל $\Delta x \neq 0$ מתקיים ש

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{-1}{\Delta x}$$

שזה מספר אינסופי.

4. נתון כי הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \geq 0 \\ \cos x & x < 0 \end{cases}$$

היא גזירה, מצאו את a, b. (רמז: שימו לב שאם ϵ אינפיניטיסימל אז $\cos\epsilon \approx 1$)
תשובה: בכל נקודה $x \neq 0$ ברור שהפונקציה גזירה. הבעיה יכולה להיות רק ב $x = 0$.
צריך לוודא ש

$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

הוא תמיד מספר סופי ותמיד בעל אותו חלק סטנדרטי. נשים לב ש:

$$\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - b}{\Delta x}$$

אם $\Delta x \geq 0$ אז

$$\frac{f(\Delta x) - b}{\Delta x} = \frac{a\Delta x + b - b}{\Delta x} = a$$

ואם $\Delta x < 0$ אז

$$\frac{f(\Delta x) - b}{\Delta x} = \frac{\cos \Delta x - b}{\Delta x}$$

כדי שהמספר המתקבל יהיה סופי, חייבים ש $\cos \Delta x - b$ יהיה אינפיניטיסימל, וזה קורה רק אם $b = 1$, כעת

$$\operatorname{st}(\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}) = \operatorname{st}(\frac{\cos \Delta x - \cos 0}{\Delta x})$$

שזו הנגזרת של $\cos x$ בנקודה $x = 0$. כלומר

$$\operatorname{st}(\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}) = -\sin 0 = 0$$

לסיכום: $a = 0$ ו $b = 1$.

5. בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ נגדיר שתי פונקציות

$$y = \sin 2t \quad x = \sin t$$

מצאו את כל ערכי ה $\underline{x}$ בהם הנגזרת של y לפי x היא 0.
תשובה:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{2\cos 2t}{\cos t}$$

ערך זה מתאפס כאשר

$$\cos 2t = 0$$

בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ זה קורה כאשר $t = \pm\frac{\pi}{4}$. בנקודות אלה הערך של x הוא:

$$x = \pm \sin \frac{\pi}{4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

וזו התשובה.

6. תהי f גזירה ב x_0 ו gפונקציה שאינה גזירה ב x_0. איזה מהטענות הבאות נכונה? הסכום $f + g$:

(א) תמיד גזיר ב x_0.

(ב) תמיד לא גזיר ב x_0.

(ג) לא ניתן לקבוע (כלומר: קיימות f, g שעבורן הסכום גזיר וכאלה שעבורן הסכום לא גזיר).

הוכיחו טענתכם.

תשובה: תמיד לא גזיר. נניח בשלילה שהסכום גזיר. כלומר לכל Δx הערך

$$\frac{(f+g)(x_0+\Delta x)-(f+g)(x_0)}{\Delta x}$$

הוא תמיד סופי ותמיד יש לו אותו חלק סטנדרטי.

$$\frac{(f+g)(x_0+\Delta x)-(f+g)(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}$$

היות שהביטוי $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ סופי (הרי f גזירה ב x_0) כדי שצד שמאל יהיה סופי חייבים שגם $\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}$ יהיה סופי. כעת אפשר להשתמש בחישובים של חלק סטנדרטי

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0)&=\mathrm{st}(\frac{(f+g)(x_0+\Delta x)-(f+g)(x_0)}{\Delta x})\\&=\mathrm{st}\,\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\mathrm{st}\,\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\\&=f'(x_0)+\mathrm{st}\,\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathrm{st}\,\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=(f+g)'(x_0)-f'(x_0)$$

כך קיבלנו ש g גזירה, בסתירה להנחה.

7. תהינה f, g פונקציות שאינן גזירות ב x_0. איזה מהטענות הבאות נכונה? הסכום $f+g$:

(א) תמיד גזיר ב x_0.

(ב) תמיד לא גזיר ב x_0.

(ג) לא ניתן לקבוע (כלומר: קיימות f, g שעבורן הסכום גזיר וכאלה שעבורן הסכום לא גזיר).

הוכיחו טענתכם.

תשובה: אי אפשר לקבוע. ייתכן ש $f(x)=|x|$ ו $g(x)=-|x|$ ואז סכומם 0 שזו פונקציה גזירה בכל נקודה .

וייתכן ש $f(x)=|x|$ ו $g(x)=|x|$ ואז סכומם $2|x|$ שזו שוב פונקציה לא גזירה ב $x=0$.