

תרגיל 5 אינפי 1 למדמ"ח

עוד על נגזרת

1. חשבו את הנגזרות עבור הפונקציות הבאות. אם לא נאמר אחרת בטאו את התשובה לפי x .

$$y = \sqrt[5]{2-3x} \quad (\text{א})$$

תשובה: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}(2-3x)^{-\frac{4}{5}} \cdot (-3)$

$$y = \cos \sqrt{x} \quad (\text{ב})$$

תשובה: $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$$y = e^{-x^2} \quad (\text{ג})$$

תשובה: $\frac{dy}{dx} = e^{-x^2} \cdot (-2x)$

$$y = \sin(2x) \cos^2(3x) \quad (\text{ד})$$

תשובה: $\frac{dy}{dx} = 2 \cos(2x) \cos^2(3x) - 6 \sin(2x) \cos(3x) \sin(3x)$

$$y = \frac{1}{u} \quad u = 3v + 4 \quad v = \frac{1}{x+1} \quad (\text{ה})$$

תשובה:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{u^2} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{(3v+4)^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2 \left(\frac{3}{x+1} + 4\right)^2} \end{aligned}$$

$$(x) \quad y = \frac{2t+3}{t+2} \quad x = \frac{2t+1}{t+2} \quad (\text{ו})$$

תשובה: לפי t זה קל:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2(t+2)-(2t+3)}{(t+2)^2}}{\frac{2(t+2)-(2t+1)}{(t+2)^2}} = \frac{2t+4-2t-3}{2t+4-2t-1} = \frac{1}{3}$$

היות שאין תלות ב t ולכן זו גם התשובה לפי x .

$$(z) \quad y = \ln t \quad x = e^t \quad (\text{ז})$$

תשובה: לפי t זה קל:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{t}}{e^t} = \frac{1}{te^t}$$

לפי x זה גם לא קשה מדי: $t = \ln x$ ולכן

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x e^{\ln x}} = \frac{1}{x \ln x}$$

2. גוף נע במישור לפי המשוואות

$$y = \sqrt{t} \quad x = \frac{1}{1-t^2}$$

מצאו את שיפוע הנתיב שבו הוא נע (מבוטא לפי t)
תשובה: השיפוע שלו הוא $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{-\frac{1}{(1-t^2)^2}(-2t)} = \frac{(1-t^2)^2}{4t\sqrt{t}}$$

3. באילו נקודות הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

היא גזירה? חשבו את נגזרתה בכל נקודה בה היא גזירה.
תשובה: בנקודות $x \notin \mathbb{N}$ הפונקציה גזירה וזה בגלל שלכל Δx אינפיניטיסימל

$$f(x + \Delta x) = 0$$

ולכן

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

ולכן

$$f'(x) = 0$$

בנקודות $x \in \mathbb{N}$ הפונקציה לא גזירה משום שלכל $\Delta x \neq 0$ מתקיים ש

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{-1}{\Delta x}$$

זוה מספר אינסופי.

4. נתון כי הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \geq 0 \\ \cos x & x < 0 \end{cases}$$

היא גזירה, מצאו את a, b . (רמז: שימו לב שאם ϵ אינפיניטיסימל אז $\cos \epsilon \approx 1$)
תשובה: בכל נקודה $x \neq 0$ ברור שהפונקציה גזירה. הבעיה יכולה להיות רק ב $x = 0$. צריך לוודא ש

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

הוא תמיד מספר סופי ותמיד בעל אותו חלק סטנדרטי. נשים לב ש:

$$\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - b}{\Delta x}$$

אם $\Delta x \geq 0$ אז

$$\frac{f(\Delta x) - b}{\Delta x} = \frac{a\Delta x + b - b}{\Delta x} = a$$

ואם $\Delta x < 0$ אז

$$\frac{f(\Delta x) - b}{\Delta x} = \frac{\cos \Delta x - b}{\Delta x}$$

כדי שהמספר המתקבל יהיה סופי, חייבים ש $\cos \Delta x - b$ יהיה אינפיניטיסימל, וזה קורה רק אם $b = 1$, כעת

$$\text{st}\left(\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}\right) = \text{st}\left(\frac{\cos \Delta x - \cos 0}{\Delta x}\right)$$

שזו הנגזרת של $\cos x$ בנקודה $x = 0$. כלומר

$$\text{st}\left(\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}\right) = -\sin 0 = 0$$

לסיכום: $a = 0$ ו $b = 1$.

5. בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ נגדיר שתי פונקציות

$$y = \sin 2t \quad x = \sin t$$

מצאו את כל ערכי ה- x בהם הנגזרת של y לפי x היא 0.
תשובה:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 \cos 2t}{\cos t}$$

ערך זה מתאפס כאשר

$$\cos 2t = 0$$

בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ זה קורה כאשר $t = \pm \frac{\pi}{4}$. בנקודות אלה הערך של x הוא:

$$x = \pm \sin \frac{\pi}{4} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

וזו התשובה.

6. תהי f גזירה ב x_0 ו g פונקציה שאינה גזירה ב x_0 . איזה מהטענות הבאות נכונה?
הסכום $f + g$:

(א) תמיד גזיר ב x_0 .

(ב) תמיד לא גזיר ב x_0 .

(ג) לא ניתן לקבוע (כלומר: קיימות f, g שעבורן הסכום גזיר וכאלה שעבורן הסכום לא גזיר).
הוכיחו טענתכם.

תשובה: תמיד לא גזיר. נניח בשלילה שהסכום $f + g$ גזיר ב x_0 . אז היות ש

$$g = f + g - f$$

נקבל שגם g גזירה ב x_0 בתור סכום של פונקציות שתי גזירות ב x_0 ($f + g$) ו $-f$. זאת בסתירה לכך ש g לא גזירה ב x_0 .

7. תהינה f, g פונקציות שאינן גזירות ב x_0 . איזה מהטענות הבאות נכונה? הסכום $f + g$:

(א) תמיד גזיר ב x_0 .

(ב) תמיד לא גזיר ב x_0 .

(ג) לא ניתן לקבוע (כלומר: קיימות f, g שעבורן הסכום גזיר וכאלה שעבורן הסכום לא גזיר).
הוכיחו טענתכם.

תשובה: אי אפשר לקבוע. ייתכן ש $f(x) = |x|$ ו $g(x) = -|x|$ ואז סכומם 0 שזו פונקציה גזירה בכל נקודה.
וייתכן ש $f(x) = |x|$ ו $g(x) = |x|$ ואז סכומם $2|x|$ שזו שוב פונקציה לא גזירה ב $x = 0$.