שיעורי בית 3

17 בנובמבר 2015

1. תהא G חבורה. נגדיר יחס עליה כך

$$g_1 \sim g_2 \iff \exists x \in G : xg_1x^{-1} = g_2$$

ליחס זה קוראים יחס ההצמדה או יחס צמידות. (מינוח: מחלקת שקילות של יחס ההצמדה נקראת מחלקת צמידות)

(א) הוכח כי ~ יחס שקילות על G.

פתרון : 1) רפלקסיביות: לכל $g \in G$ מתקיים כי $ege^{-1} = g$ ולכן $g \sim g$.

2) סימטריות: נניח $g_1 \sim g_2$ אזי קיים x כך ש $xg_1x^{-1} = g_2$. נכפול ב x מימין ו x^{-1} משמאל ונקבל $g_1 = x^{-1}g_2x$ נסמן $y = x^{-1}$ ונקבל $yg_2y^{-1} = g_1$, כלומר $g_2 \sim g_1$.

3) טרנזיטיביות: נניח $g_1 \sim g_2, g_2 \sim g_3$ אזי קיימים x, y כך ש $xg_1x^{-1} = g_2\,,\, yg_2y^{-1} = g_3$. נסדר את המשוואות ל $xg_1x^{-1} = g_2\,,\, g_2 = y^{-1}g_3y$, נציב לקבל $xg_1x^{-1} = y^{-1}g_3y$. נכפול שוב ב y משמאל ו y^{-1} מימין ונקבל

$$yxg_1x^{-1}y^{-1} = g_3$$

נסמן $z = yx$ ונקבל $zg_1z^{-1} = g_3$ כלומר $g_1 \sim g_3$.

(ב) יהא $g \in Z(G)$ (המרכז של G), מה גודל מחלקת הצמידות של g?

פתרון : מחלקת השקילות היא

$$[g]_\sim = \left\{xgx^{-1} \,|\, x \in G\right\} = \left\{gxx^{-1} \,|\, x \in G\right\} = \{g \,|\, x \in G\} = \{g\}$$

ולכן גודל מחלקת הצמידות היא 1.

2. עבור $G = S_n$ ויחס ההצמדה:

(א) מצא את מחלקת הצמידות של $(1, 2)$.

פתרון : מתקיים כי

$$\sigma\,(1, 2)\,\sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2))$$

ולכן

$$[(1,2)]_\sim = \left\{\sigma\,(1,2)\,\sigma^{-1}\,|\,\sigma\in S_n\right\} = \left\{(\sigma(1),\sigma(2))\;|\,\sigma\in S_n\right\} = \left\{(i,j)\;|\,1\le i<j\le n\right\}$$

(ב) כמה איברים יש במחלקת השקילות של $(1,2)$?

פתרון : מסעיף א'

$$[(1,2)]_\sim = \left\{(i,j)\;|\,1\le i<j\le n\right\} = \left\{(i,j)\;|\,1\le i\ne j\le n\right\}$$

נבחר i כל מספר בין 1 ל n. ואז נבחר j שונה. סה"כ אפשריות שספרנו זה $n\cdot(n-1)$. אבל ספרנו כפליות, למשל $(3,2)=(2,3)$לכן צריך לחלק ב 2.
התשובה הסופית היא

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

*זה שקול לשאלה לבחור 2 איברים מתוך n ללא חשיבות לסדר, ללא חזרות.
לפי נוסחת הבינום זה שווה ל

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

3. תזכורת: הגדרנו את A_n כחבורת התמורות הזוגיות, גם עליה ניתן להגדיר את יחס השקילות. תהא $\sigma\in A_n$ תמורה זוגית. בפרט $\sigma\in S_n$ ונוכל להסתכל על 2 מחלקות שקילות:

- $[\sigma]_{A_n}$ מחלקת הצמידות של σ כאיבר ב A_n
- $[\sigma]_{S_n}$ מחלקת הצמידות של σ כאיבר ב S_n

(א) מתי שתי מחלקות האלה שוות? הוכיחו כי הבאים שקולים:

i. מחלקות הצימודת לא שוות

ii. אין תמורה אי זוגית המתחלפת עם σ

פתרון : $(1)\Rightarrow(2)$: נניח בשלילה שיש תמורה אי זוגית $\tau\in S_n$ המתחלפת עם σ. אזי $\tau\sigma\tau^{-1}=\sigma\tau\tau^{-1}=\sigma$.

טענה: כל $\tau'\sigma\tau'^{-1}\in[\sigma]_{S_n}\setminus[\sigma]_{A_n}$ תקיים כי τ' תמורה זוגית.

הוכחה: אחרת τ' תמורה אי זוגית ואז $\tau'\sigma\tau'^{-1}=\tau'\tau\sigma\tau^{-1}\tau'^{-1}=(\tau'\tau)\,\sigma\,(\tau'\tau)^{-1}$ אבל $\tau'\tau$ תמורה זוגית (מכפלה של אי זוגיות יוצא זוגית), סתירה לכך ש $\tau'\sigma\tau'^{-1}\notin[\sigma]_{A_n}$.

מסקנה: אם τ' תמורה אי זוגית אזי $\tau'\sigma\tau'^{-1} \in [\sigma]_{A_n}$.
בנוסף, כיוון ש $\tau'\sigma\tau'^{-1} \in [\sigma]_{A_n}$ עבור τ' תמורה זוגית על פי הגדרה, נקבל כי $\tau'\sigma\tau'^{-1} \in [\sigma]_{A_n}$ עבור כל תמורה τ'. ואז נקבל כי $[\sigma]_{S_n} = [\sigma]_{A_n}$. סתירה לנתון.

$(1) \Rightarrow (2)$ נניח בשלילה כי $[\sigma]_{S_n} = [\sigma]_{A_n}$. כיון ש $\sigma \in [\sigma]_{S_n} = [\sigma]_{A_n}$ אזי קיימת τ תמורה אי זוגית המקיימת $\sigma = \tau\sigma\tau^{-1}$, כלומר τ מתחלפת עם σ. סתירה.

(ב) חשב את מחלקת הצמידות של $\sigma = (1,2,3) = (1,2)(2,3) \in A_4$ ומצא איבר ב $[\sigma]_{S_n} \setminus [\sigma]_{A_n}$ (כלומר תמורה במחלקת הצמידות של σ כאיבר ב S_n שאינו נמצא במחלקת הצמידות של σ כאיבר ב A_n)

פתרון : מספר האיברים של A_4 הוא 12 (כיון ש $|S_4| = 4! = 24$ לחלק ל ־ 2). הנה האיברים במפורש

$$A_4 = \left\{ \begin{array}{c} id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3), (1,2,3), (1,3,2) \\ \\ (1,3,4), (1,4,3), (12,4), (1,4,2), (2,3,4), (2,4,3), \end{array} \right\}$$

ולכן

$$[\sigma]_{A_4} = \left\{ \tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1), \tau(2), \tau(3)) \mid \tau \in A_4 \right\} = \{(1,2,3), (2,1,4), (3,4,1), (4,3,2)\}$$

ובנוסף,

$$(1,3,2) \in [\sigma]_{S_n} \setminus [\sigma]_{A_n}$$