תרגיל תיאורטי מספר 4

1. סטודנט סקרן החליט לבדוק מה עומד מאחורי הצלחתו במבחני התואר. הוא החליט שהפרמטרים הקובעים הם: P_1 מספר השעות שהקדיש ללימוד למבחן, P_2 מספר שיעורי הבית שפתר ו P_3 מספר הספרים שהוא קרא בנושא. הוא אסף את הנתונים הבאים מ 4 קורסים שונים

	P_1	P_2	P_3	Final Grade
1	4	2	3	7
2	2	3	3	4
3	4	4	5	8
4	2	5	5	6

השאלה שעמדה בפני הסטודנט היא מה המשקל שתרם כל פרטמר לציון המבחן. הוא החליט לסמן ב x_i את המשקל שתורם פרמטר P_i לציון הסופי וניסה למצוא אותם ע"י פתירת המשוואות

$$\begin{aligned}4x_1+2x_2+3x_3&=7\\2x_1+3x_2+3x_3&=4\\4x_1+4x_2+5x_3&=8\\2x_1+5x_2+5x_3&=6\end{aligned}$$

אך לצערו, לא נמצא פתרון... הסטודנט לא אמר נואש והחליט להשתמש בידע שרכש בקורס אלגברה לינארית... הוא החליט למצוא c_1,c_2,c_3 כך שוקטור התוצאה $b'=\begin{pmatrix}b'_1\\b'_2\\b'_3\\b'_4\end{pmatrix}$ שמחושב ע"י

$$\begin{aligned}4c_1+2c_2+3c_3&=b'_1\\2c_1+3c_2+3c_3&=b'_2\\4c_1+4c_2+5c_3&=b'_3\\2c_1+5c_2+5c_3&=b'_4\end{aligned}$$

יהיה הכי קרוב לוקטור התוצאה האמיתי $b=\begin{pmatrix}7\\4\\8\\6\end{pmatrix}$. כוונתו ב"קרוב" הוא למזער את $\|b-b'\|$ (כאשר $\|*\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית המוגדרת על $\mathbb{R}^4$). מצאו גם אתם את $c_!,c_2,c_3$.
[הדרכה: יצגו את הבעיה כמערכת משוואות $Ax=b$ וחשבו איך הבעיה של הסטודנט שקולה למיצאת הטלה של b על איזה שהוא תת מרחב (שהוא יהיה b')... לאחר מכן פתרו את המשוואה $Ax=b'$. אזהרה: תרגיל עם חישובים לפניך]

2. יהא $(V, \langle *, * \rangle)$ ממ"פ. נגדיר $S = \{u \in V : \|u\| = 1\}$ (כאשר $\|u\|$ זה הנורמה המושרית). יהא $0 \neq v \in V$. הוכיחו כי $\min\{\|v - u\| : u \in S\}$ מתקבל עבור הנרמול של v (כלומר עבור $\tilde{u} = \frac{v}{\|v\|}$).

3. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ויהיו v ו"ע המשויך ל λ ע"ע (כלומר $Av = \lambda v$) .

(א) הוכיחו כי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים כי v ו"ע של A^k המתאים לע"ע λ^k.

(ב) הוכיחו כי לכל פולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים כי v ו"ע של $p(A)$ המתאים לע"ע $p(\lambda)$.

4. תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ לכסינה. הוכיחו כי $A^2 + 3I$ לכסינה והפיכה.

5. יהיו $a_0, a_1 \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ מספרים מרוכבים. נגדיר מטריצת ונדרמונט להיות

$$V(a_0, \ldots a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

למשל

$$V(3,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו כי

$$|V(a_0, \ldots a_{n-1})| = \prod_{0 \le i < j \le n-1} (a_j - a_i)$$

למשל

$$|V(3,2,4)| = (4-2)(4-3)(2-3)$$

הדרכה: בצעו את פעולות העמודה האלמנטריות הבאות לפי הסדר הבא

- $C_n - a_0 C_{n-1} \to C_n$
- $C_{n-1} - a_0 C_{n-2} \to C_{n-1}$
- עד $C_2 - a_0 C_1 \to C_2$
- השתמשו ברקורסיה/אינדוקציה על מנת להגיע לפתרון.

כאשר C_i זה עמודה i של המטריצה (שימו לב שפעולות אלו לא משנות את הדטרמיננטה)

(ב) הוכיחו כי $a_0, a_1 \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ מספרים שונים אמ"מ המטריצה $V(a_0, \ldots a_{n-1})$ הפיכה.

6. תהא $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ עם דרגה = 5. נתון כי $rank(A-3I)=5$. עוד נתון כי ל A קיים ע"ע ששוה ל - 5 . הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצא את האלכסונית ש A דומה לה.

7.

(א) תהא $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ כך שכל שורה של A מסתכמת לאותו מספר שנסמנו λ. הוכיחו כי λ ע"ע של A.
למשל למטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ יש ערך עצמי 6 כי כל שורה מסתכמת ל 6.
רמז: חישבו מי הו"ע המתאים.

(ב) תהא $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. לכסנו או"ג את A. כלומר מצאו מטריצה P או"ג ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP=D$

8. נגדיר סדרת מספרים בצורה רקורסיבית:

$$
\begin{aligned}
a_{-1} &= -1 \\
a_0 &= 0 \\
a_1 &= 1 \\
\forall n \geq 2 \ a_n &= -2a_{n-1}+a_{n-2}+2a_{n-3}
\end{aligned}
$$

(א) הגדירו A המקיימת $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 2$.

(ב) לכסנו את A כדי למצוא ביטוי מפורש ל a_n (עבור $n \geq 2$). הדרכה: שימו לב כי $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix}$ לכל $n \geq 2$.