

# ז'רדון מטריצה

## 1. הכללים לצורת ז'רדון

### התנאי ההכרחי והמספיק לז'רדון

מטריצה  $A$  ניתנת לז'רדון אם ורק אם  $p_A(x)$  מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.

### הכללים

עבור ע"ע  $\lambda$  כלשהו:

- סכום סדרי הבלוקים המתאימים ל- $\lambda$  בצורת הז'רדון הוא הריבוי האלגברי של  $\lambda$ .
- סדר הבלוק הכי גדול המתאים ל- $\lambda$  בצורת הז'רדון הוא החזקה של הגורם  $(x - \lambda)$  בפולינום המינימלי.
- מספר הבלוקים המתאימים ל- $\lambda$  בצורת הז'רדון הוא הריבוי הגיאומטרי של  $\lambda$ .

## 2. האלגוריתם לז'רדון מטריצה

### אלגוריתם

תהי  $A$  מטריצה כך שהפולינום האופייני שלה מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.

1. נמצא את הפולינום האופייני של המטריצה. נסמן  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  הע"ע השונים של  $A$ .

2. עבור כל ע"ע  $\lambda$  נמצא בסיס למרחב העצמי המוכלל  $K_\lambda$  באופן הבא:

2.1. נסמן ב- $k$  את החזקה של הגורם  $(x - \lambda)$  בפולינום המינימלי.

2.2. נמצא בסיס ל- $C[(A - \lambda I)^{k-1}] \cap V_\lambda$  באופן הבא:

2.2.1. נביט במטריצה  $(A - \lambda I)^{k-1}$ , ונבחר עמודות  $C_{i_1}, \dots, C_{i_t}$  הפורשות את  $C[(A - \lambda I)^{k-1}]$ .

2.2.2. נפתור את מערכת המשוואות  $(A - \lambda I)(\alpha_1 C_{i_1} + \dots + \alpha_t C_{i_t}) = 0$ .

2.2.3. לכל בסיס במרחב הפתרונות  $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$  של המשוואה הנ"ל נסמן  $u = \alpha_1 e_{i_1} + \dots + \alpha_t e_{i_t}$ .

2.2.4. עבור כל וקטור פתרון כנ"ל נוסיף את כל הוקטורים שבמסלול  $(A - \lambda I)u, \dots, (A - \lambda I)^{k-1}u$  לבסיס בסדר הזה.

2.3. בצורה דומה נפעל עבור  $k - 2$ , כאשר נוריד מהמסלולים שהתקבלו תלויות לינאריות.

2.4. נפסיק את התהליך כאשר נקבל מספר וקטורים השווה לריבוי האלגברי של  $\lambda$ .

3. נאחד את כל הבסיסים המז'רדנים לבסיס אחד  $B -$  ללא שינוי סדר הוקטורים.

4. נשים את איברי  $B$  בעמודות המטריצה  $P$ . המטריצה  $J = P^{-1}AP$  היא בצורת ז'רדון.

**הסבר האלגוריתם**

באלגוריתם זה נשתמש באופרטור  $T = L_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  המוגדר על ידי  $Tv = Av$ , כיוון שהצגתו לפי הבסיס הסטנדרטי היא  $A$ , לכן כל הצגה אחרת שלו יחסית לבסיס אחר דומה ל- $A$ .

אם  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  הע"ע השונים של  $T$ , אזי  $\mathbb{F}^n = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_s}$  (לפי משפט הפירוק למרחבים עצמיים מוכללים). נסמן  $B_1, \dots, B_s$  בסיסים של  $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_s}$  בהתאמה,  $B = B_1 \cup \dots \cup B_s$ .

כל  $K_\lambda$  הוא תת מרחב אינווריאנטי תחת כל פולינום  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ , לכן:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & [T]_{B_s} \end{pmatrix}$$

ניקח  $1 \leq i \leq s$ . לפי הגדרת המרחב העצמי המוכלל, לכל  $v \in K_{\lambda_i}$ ,  $(T - \lambda_i I)^n v = 0$ . לפיכך, על ידי הגדרת  $N_i := T - \lambda_i I$ , נקבל:

$$(1) \quad N_i|_{K_{\lambda_i}} \text{ אופרטור ניליפוטנטי (העלאתו בחזקת } n \text{ תהיה אופרטור האפס).}$$

$$(2) \quad [T]_{B_i} = [N_i]_{B_i} + \lambda_i I, \text{ כלומר } [N_i]_{B_i} = [T - \lambda_i I]_{B_i} = [T]_{B_i} - \lambda_i I$$

לכן בשלב הראשון אנו רוצים להבין כיצד אופרטור ניליפוטנטי מתנהג מבחינת צורת ז'ורדן. כל מה שתואר עד עכשיו היה הרקע. כעת אנו מתחילים את שלב 2 (שלב 1 – מציאת ע"ע נעשה בתחילה).

כאשר התעסקנו במשפט ז'ורדן של אופרטור ניליפוטנטי, הוכחנו שהבסיס המז'רדן חייב להיות איחוד של מסלולים זרים. בהוכחה, בכל פעם לקחנו בסיס של אחד המרחבים הוקטוריים:

$$\text{im } N_i^{k-1} \subseteq \text{im } N_i^{k-2} \cap \ker N_i \subseteq \text{im } N_i^{k-3} \cap \ker N_i \subseteq \dots \subseteq \text{im } N_i \cap \ker N_i \subseteq \ker N_i$$

והוכחנו שאם כל וקטור "נאריך למסלול" ונאחד את כל הקבוצות שהתקבלו – נקבל בסיס מז'רדן.

כעת, נראה איך כל זה משתקף באלגוריתם:

המטריצה המייצגת של האופרטור הניליפוטנטי  $N_i$  על  $K_{\lambda_i}$  היא  $A - \lambda_i I$  (ביחס לבסיס הסטנדרטי). לכן,  $\text{im}[(N_i)^p] = C((A - \lambda_i I)^p)$ ,  $\ker N_i = N(A - \lambda_i I) = V_{\lambda_i}$ .

בעת מציאת הבסיס המז'רדן עבור  $\lambda_i$ , אנו נעים משמאל לימין בשרשרת ההכלה הנ"ל.

אנו מתחילים בחזקה  $k - 1$  כאשר  $k$  הוא החזקה של הגורם  $(x - \lambda)$  בפולינום המינימלי, כיוון ש- $k$  הוא סדר הניליפוטנטיות של  $N_i$ .

אסביר כעת עבור חזקה כלשהי  $p$  כיצד אנו מוצאים את הבסיס:

$$\text{אנו מתחילים ממצאת בסיס עבור } \text{im}[(N_i)^p], \text{ בכך שאנו בוחרים את העמודות של } (A - \lambda_i I)^p \text{ הפורשות את מרחב העמודות שלה (2.2.1).}$$

כעת אנו מחפשים את הוקטורים שבחיתוך. אנו לוקחים צירוף לינארי של העמודות שמצאנו קודם, ובודקים מתי הוא במרחב העצמי – כלומר מתי כפילתו ב- $(A - \lambda_i I)$  תיתן את וקטור האפס (2.2.2).

## הקליד וערך: גיא בלשר

מצאנו צירוף לינארי כזה. כעת נסמן  $u = \alpha_1 e_{i_1} + \dots + \alpha_t e_{i_t}$  (ראה סימונים באלגוריתם, 2.2.3). המסלול  $u, (A - \lambda_i I)u, \dots, (A - \lambda_i I)^p u$  הוא המסלול המבוקש (2.2.4) – כי נזכור ש- $Ae_r = C_r$  (העמודה ה- $r$ ).

זהו ההסבר ל-2.2+2.3. הורדת התלויות הלינאריות נעשית בגלל ההכלה.

נפסיק כאשר נקבל מספר וקטורים כולל (באיחוד המסלולים) השווה לריבוי האלגברי של  $\lambda_i$ , כיוון שהמימד של  $K_{\lambda_i}$  הוא הריבוי האלגברי (2.4).

כעת, נאחד את כל המסלולים שהתקבלו. נקבל בסיס  $B$  של  $V$ .

לאחר שהבנו כיצד מתנהג אופרטור ניליפוטנטי, אופרטור  $S$  בעל ע"ע יחיד  $\lambda$  מתנהג בצורה דומה, כי  $(S - \lambda I)$  אופרטור ניליפוטנטי.

לפי הלמות שהוכחנו עבור מטריצות אלכסוניות בלוקים, נקבל שצורת הז'ורדן של  $T$  היא "השמת צורות הז'ורדן של כל הבלוקים בבלוקים מתאימים". כמו כן, הבסיס המז'ורדן הוא איחוד הבסיסים המז'ורדניים של כל בלוק.

לכן נקבל צורת ז'ורדן של  $A$ .

### 3. דוגמאות

ז'רדון מטריצה ניליפוטנטית

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ניקח את המטריצה}$$

נשים לב ש- $A$  ניליפוטנטית, כי  $A^4 = 0$ . לכן:

$$p_A(x) = x^5$$

$$m_A(x) = x^4$$

הע"ע היחיד הוא 0.

נמצא בסיס ל- $C(A^3) \cap V_0$ , לפי האלגוריתם:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

העמודה החמישית פורשת את  $C(A^3)$ . עלינו לבדוק האם קיים  $\alpha$  שיהיה הפתרון של המשוואה:

$$A \cdot \alpha \cdot C_5 = 0$$

ואכן, כל  $\alpha \in \mathbb{F}$  הוא פתרון (קל לוודא כי  $A \cdot C_5 = 0$ ). לכן נבחר  $\alpha = 1$ . נסמן  $u = 1 \cdot e_5 = e_5$ .

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{קיבלנו מסלול: } \{A^3 e_5, A^2 e_5, A e_5, e_5\}, \text{ ובצורה מפורשת. עדיין חסר לנו}$$

וקטור כדי להגיע לריבוי האלגברי של 0 (=5), לכן נמשיך.

הקליד וערך: גיא בלשר

נמצא בסיס ל- $C(A^2) \cap V_0$ , לפי האלגוריתם:

העמודה הראשונה והעמודה החמישית שתיהן פורשות את  $C(A^2)$ . נחפש  $\alpha, \beta$  כך ש:

$$A \cdot (\alpha C_3 + \beta C_5) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

לכן נקבל כי עבור  $\beta = 0$ , יש לנו פתרון. נבחר  $\alpha = 1$ . נסמן  $u = e_1$ .

קיבלנו מסלול  $\{A^2 e_1, A e_1, e_1\}$  ובצורה מפורשת  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . עלינו להוריד תלויות לינאריות,

לכן נוריד את הוקטורים  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ו- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ונקבל שאיחוד המסלולים הוא הבסיס המז'רדן:

המטריצה המז'רדנת של  $A$  (בדקו!).  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . ואכן, המטריצה  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  היא

## הקליד וערך: גיא בלשר

### ז'רדון מטריצה עם ע"ע יחיד

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 6 & -3.5 & 5.25 \\ 0 & 0 & 7.5 & -2.25 \\ 0 & 0 & 1 & 4.5 \end{pmatrix} \quad \text{ניקח את המטריצה}$$

נחשב פולינום אופייני:

$$\begin{aligned} p_A(x) = \det(xI - A) &= \det \begin{pmatrix} x-6 & 0 & -1 & 1.5 \\ 0 & x-6 & 3.5 & -5.25 \\ 0 & 0 & x-7.5 & 2.25 \\ 0 & 0 & -1 & x-4.5 \end{pmatrix} = (x-6) \det \begin{pmatrix} x-6 & 3.5 & -5.25 \\ 0 & x-7.5 & 2.25 \\ 0 & -1 & x-4.5 \end{pmatrix} = \\ &= (x-6)^2 \det \begin{pmatrix} x-7.5 & 2.25 \\ -1 & x-4.5 \end{pmatrix} = (x-6)^2 ((x-7.5)(x-4.5) + 2.25) = (x-6)^2 (x^2 - 12x + 36) = (x-6)^4 \end{aligned}$$

לכן ל- $A$  יש ע"ע יחיד: 6.

נחפש את הפולינום המינימלי. הוא מהצורה  $m_A(x) = (x-6)^k$  כי  $k \neq 1$   $A - 6I \neq 0$ . נבדוק האם  $k = 2$ , כלומר האם  $(A - 6I)^2 = 0$ :

$$\begin{aligned} (A - 6I)^2 &= \begin{pmatrix} 6-6 & 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 6-6 & -3.5 & 5.25 \\ 0 & 0 & 7.5-6 & -2.25 \\ 0 & 0 & 1 & 4.5-6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & -3.5 & 5.25 \\ 0 & 0 & 1.5 & -2.25 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & -3.5 & 5.25 \\ 0 & 0 & 1.5 & -2.25 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

לכן  $m_A(x) = (x-6)^2$ .

לפי האלגוריתם, עלינו למצוא בסיס ל- $C(A - 6I) \cap V_6$ .

$$\text{נסתכל על } A - 6I: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & -3.5 & 5.25 \\ 0 & 0 & 1.5 & -2.25 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 \end{pmatrix} \cdot \text{העמודות שלה ת"ל, לכן העמודה השלישית מהווה}$$

בסיס למרחב העמודות של  $A - 6I$ . עלינו למצוא  $\alpha$  כך ש- $A \cdot \alpha \cdot C_3 = 0$ . אך תנאי זה מתקיים לכל  $\alpha \in \mathbb{F}$ , לכן נוכל לבחור  $\alpha = 1$  ולסמן  $u = e_3$ . קיבלנו את המסלול  $\{(A - 6I)e_3, e_3\}$ , ובאופן מפורש

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3.5 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

## הקליד וערך: גיא בלשר

הריבוי האלגברי של הע"ע 6 הוא 4, ויש לנו בינתיים רק 2 וקטורים, לכן עלינו להמשיך בתהליך המציאת שני וקטורים נוספים.

לכן, עלינו למצוא בסיס ל- $V_6$ . נפתור את המערכת ההומוגנית  $(A - 6I)v = 0$  למציאת בסיס למרחב הפתרונות:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & -3.5 & 5.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & -2.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2+3.5R_1 \\ R_3-1.5R_1 \\ R_4-R_1}} \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

לכן הבסיס למרחב הפתרונות:

עלינו להוריד  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  כלומר קיבלנו את הוקטורים  $x = t, y = s, z = 1.5p, w = p$ .

תלויות לינאריות, לכן נוריד את הוקטור  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ונקבל שאיחוד המסלולים (בשלב האחרון אין צורך לפתוח מסלולים, כי  $(A - 6I)$  הוא בחזקת 0), שהוא הבסיס המז'רדן, הוא:

המז'רדנת של  $A$  (בדקו!).

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3.5 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ואכן, המטריצה  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3.5 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  היא המטריצה



הקליד וערך: גיא בלשר

ז'רדון מטריצה עם כמה ע"ע שונים

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 & 5 \\ -3 & -2 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ ניקח את המטריצה}$$

ראשית, נמצא פולינום אופייני.

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(xI - A) = \det \begin{pmatrix} x+1 & 2 & -6 & -5 \\ 3 & x+2 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & x+2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & x+2 \end{pmatrix} = (-1)^{4+4} (x+2) \det \begin{pmatrix} x+1 & 2 & -6 \\ 3 & x+2 & 7 \\ -1 & -1 & x+2 \end{pmatrix} = \\ &= (x+2) \left[ (-1)^{3+1} (-1) \det \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ x+2 & 7 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} (-1) \det \begin{pmatrix} x+1 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} (x+2) \det \begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 3 & x+2 \end{pmatrix} \right] = \\ &= (x+2) \{- [2 \cdot 7 + 6(x+2)] + [7(x+1) + 18] + (x+2)[(x+1)(x+2) - 6]\} = \\ &= (x+2)[-6x - 26 + 7x + 25 + (x-1)(x+4)(x+2)] = (x+2)[(x-1) + (x-1)(x^2 + 6x + 8)] = \\ &= (x+2)(x-1)(x^2 + 6x + 9) = (x+2)(x-1)(x+3)^2 \end{aligned}$$

לכן הע"ע הם  $-3, -2, -1$ . נחפש פולינום מינימלי. יש שתי אפשרויות: הפולינום המינימלי או הורדת החזקה של  $(x+3)$  ל-1. נבדוק האם  $f(x) = (x-1)(x+2)(x+3)$  מאפס את  $A$ :

$$\begin{aligned} f(A) &= (A - I)(A + 2I)(A + 3I) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 & 5 \\ -3 & -3 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 5 \\ -3 & 1 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 10 & 2 & -32 \\ -1 & -1 & 3 & 16 \\ -5 & -5 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 5 \\ -3 & 1 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

לכן  $m_A(x) = p_A(x) = (x-1)(x+2)(x+3)^2$

נתחיל עם הע"ע  $\lambda = 1$ . לפי האלגוריתם, עלינו לחפש בסיס עבור  $V_1$  (כי החזקה בפולינום המינימלי היא 1). נחפש זאת על ידי פתרון מערכת המשוואות ההומוגנית  $(A - I)v = 0$ :

## הקליד וערך: גיא בלשר

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & 6 & 5 & 0 \\ -3 & -3 & -7 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1+2R_3 \\ R_2+3R_3 \\ R_4/(-3)}} \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -13 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1+3R_4 \\ R_3+4R_4 \\ R_2/(-13)}} \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2-R_4} \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

לכן הפתרון הכללי הוא  $x = t, y = -t, z = 0, w = 0$ , כלומר קיבלנו את הוקטור

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ נפסיק .}$$

כאן כי הגענו לריבוי האלגברי של 1.

נעבור לע"ע -2. לפי האלגוריתם, עלינו לחפש בסיס עבור  $V_{-2}$ . נחפש זאת על ידי פתרון מערכת המשוואות ההומוגנית  $(A + 2I)v = 0$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & -7 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2+3R_1 \\ R_3-R_1}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & 14 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+2R_3} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

לכן הפתרון הכללי הוא  $x = 9t, y = -5t, z = -4t, w = t$ , כלומר קיבלנו את הוקטור

$$\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ .}$$

נפסיק כאן כי הגענו לריבוי האלגברי של 2.

נעבור לע"ע -3. לפי האלגוריתם, עלינו לחפש בסיס עבור  $V_{-3} \cap C(A + 3I)$ .

נסתכל על  $A + 3I$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 5 \\ -3 & 1 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נבחר עמודות הפורשות את מרחב העמודות של

המטריצה, שהן העמודות הראשונה, השנייה והרביעית. כעת, נחפש  $\alpha, \beta, \gamma$  שעבורם:

$$(A + 3I) \cdot (\alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_4) = 0$$

## הקליד וערך: גיא בלשר

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 5 \\ -3 & 1 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 5 \\ -3 & 1 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha - 2\beta + 5\gamma \\ -3\alpha + \beta - \gamma \\ \alpha + \beta - 4\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4\alpha - 4\beta + 10\gamma + 6\alpha - 2\beta + 2\gamma + 6\alpha + 6\beta - 24\gamma + 5\gamma \\ -6\alpha + 6\beta - 15\gamma - 3\alpha + \beta - \gamma - 7\alpha - 7\beta + 28\gamma - \gamma \\ 2\alpha - 2\beta + 5\gamma - 3\alpha + \beta - \gamma + \alpha + \beta - 4\gamma - 4\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 16\alpha - 7\gamma \\ -16\alpha + 11\gamma \\ -4\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

לכן יש פתרון אם ורק אם  $\alpha = \gamma = 0$ . נוכל לבחור  $\beta = 1$ , ונסמן  $u = e_2$ . לכן קיבלנו מסלול

של  $\{(A + 3I)e_2, e_2\}$ , ובצורה מפורשת  $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . אין צורך להמשיך כי הגענו לריבוי האלגברי של

.-3

קיבלנו בסיס מז'רדן  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . ואכן, אם נשים את איברי  $B$  בעמודות

מטריצה  $P = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , נקבל שהמטריצה הזו היא המטריצה המז'רדנת של  $A$

(בדקו!).

## בהצלחה במבחן! גיא