הקליד וערך: גיא בלשר

ז'רדון מטריצה

1. הכללים לצורת ז'ורדן

התנאי ההכרחי והמספיק לז׳רדון

מטריצה A ניתנת לז'רדון אם ורק אם $p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.

הכללים

עבור ע"ע λ כלשהו:

1. סכום סדרי הבלוקים המתאימים ל-λ בצורת הז'ורדן הוא הריבוי האלגברי של λ.
2. סדר הבלוק הכי גדול המתאים ל-λ בצורת הז'ורדן הוא החזקה של הגורם $(x-\lambda)$ בפולינום המינימלי.
3. מספר הבלוקים המתאימים ל-λ בצורת הז'ורדן הוא הריבוי הגיאומטרי של λ.

2. האלגוריתם לז'רדון מטריצה

אלגוריתם

תהי A מטריצה כך שהפולינום האופייני שלה מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.

1. נמצא את הפולינום האופייני של המטריצה. נסמן $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ הע"ע השונים של A.

2. עבור כל ע"ע λ נמצא בסיס למרחב העצמי המוכלל K_λ באופן הבא:

2.1. נסמן ב-k את החזקה של הגורם $(x-\lambda)$ בפולינום המינימלי.

2.2. נמצא בסיס ל-$V_\lambda \cap C[(A-\lambda I)^{k-1}]$ באופן הבא:

2.2.1. נביט במטריצה $(A-\lambda I)^{k-1}$, ונבחר עמודות $C_{i_1}, \dots, C_{i_t}$ הפורשות את $C[(A-\lambda I)^{k-1}]$.

2.2.2. נפתור את מערכת המשוואות $(A-\lambda I)\left(\alpha_1 C_{i_1} + \cdots + \alpha_t C_{i_t}\right) = 0$.

2.2.3. לכל בסיס במרחב הפתרונות $(\alpha_1, \dots \alpha_t)$ של המשוואה הנ"ל נסמן $u = \alpha_1 e_{i_1} + \cdots + \alpha_t e_{i_t}$.

2.2.4. עבור כל וקטור פתרון כנ"ל נוסיף את כל הוקטורים שבמסלול $(A-\lambda I)^{k-1}u, \dots, (A-\lambda I)u, u$ לבסיס בסדר הזה.

2.3. בצורה דומה נפעל עבור $k-2$, כאשר נוריד מהמסלולים שהתקבלו תלויות לינאריות.

2.4. נפסיק את התהליך כאשר נקבל מספר וקטורים השווה לריבוי האלגברי של λ.

3. נאחד את כל הבסיסים המז'רדנים לבסיס אחד B – ללא שינוי סדר הוקטורים.

4. נשים את איברי B בעמודות המטריצה P. המטריצה $J = P^{-1}AP$ היא בצורת ז'ורדן.

הסבר האלגוריתם

באלגוריתם זה נשתמש באופרטור $T = L_A: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ המוגדר על ידי $Tv = Av$, כיוון שהצגתו לפי הבסיס הסטנדרטי היא A, לכן כל הצגה אחרת שלו יחסית לבסיס אחר דומה ל-A.

אם $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ הע״ע השונים של T, אזי $\mathbb{F}^n = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_s}$ (לפי משפט הפירוק למרחבים עצמיים מוכללים). נסמן $B_1, \dots, B_s$ בסיסים של $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_s}$ בהתאמה, $B = B_1 \cup \dots \cup B_s$.

כל K_λ הוא תת מרחב אינווריאנטי תחת כל פולינום $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, לכן:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T]_{B_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & [T]_{B_s} \end{pmatrix}$$

ניקח $1 \le i \le s$. לפי הגדרת המרחב העצמי המוכלל, לכל $v \in K_{\lambda_i}$, $(T-\lambda I)^n v = \mathbf{0}$.
לפיכך, על ידי הגדרת $N_i := T - \lambda_i I$, נקבל:

1) **$N_i|_{K_{\lambda_i}}$ אופרטור נילפוטנטי (העלאתו בחזקת n תהיה אופרטור האפס).**
2) **$[N_i]_{B_i} = [T-\lambda_i I]_{B_i} = [T]_{B_i} - \lambda_i I$, כלומר $[T]_{B_i} = [N_i]_{B_i} + \lambda_i I$.**

לכן בשלב הראשון אנו רוצים להבין כיצד אופרטור נילפוטנטי מתנהג מבחינת צורת ז׳ורדן.

כל מה שתואר עד עכשיו היה הרקע. כעת אנו מתחילים את שלב 2 (שלב 1 – מציאת ע"ע נעשה בתחילה).

כאשר התעסקנו במשפט ז׳ורדן של אופרטור נילפוטנטי, הוכחנו שהבסיס המז׳רדן חייב להיות איחוד של מסלולים זרים. בהוכחה, בכל פעם לקחנו בסיס של אחד המרחבים הוקטוריים:

$$\mathbf{im}\, N_i^{k-1} \subseteq \mathbf{im}\, N_i^{k-2} \cap \mathbf{ker}\, N_i \subseteq \mathbf{im}\, N_i^{k-3} \cap \mathbf{ker}\, N_i \subseteq \cdots \subseteq \mathbf{im}\, N_i \cap \mathbf{ker}\, N_i \subseteq \mathbf{ker}\, N_i$$

והוכחנו שאם כל וקטור ״נאריך למסלול״ ונאחד את כל הקבוצות שהתקבלו – נקבל בסיס מז׳רדן.

כעת, נראה איך כל זה משתקף באלגוריתם:

המטריצה המייצגת של האופרטור הנילפוטנטי N_i על K_{λ_i} היא $A - \lambda_i I$ (ביחס לבסיס הסטנדרטי).
לכן, $\operatorname{im}[(N_i)^p] = C((A-\lambda_i I)^p)$, $\ker N_i = N(A-\lambda_i I) = V_{\lambda_i}$.

בעת מציאת הבסיס המז'רדן עבור λ_i, אנו נעים משמאל לימין בשרשרת ההכלה הנ"ל.

אנו מתחילים בחזקה $k-1$ כאשר k הוא החזקה של הגורם $(x-\lambda)$ בפולינום המינימלי, כיוון ש-k הוא סדר הניליפוטנטיות של N_i.

אסביר כעת עבור חזקה כלשהי p כיצד אנו מוצאים את הבסיס:

> אנו מתחילים ממציאת בסיס עבור $\operatorname{im}[(N_i)^p]$, בכך שאנו בוחרים את העמודות של $(A-\lambda_i I)^p$ הפורשות את מרחב העמודות שלה (2.2.1).
>
> כעת אנו מחפשים את הוקטורים שבחיתוך. אנו לוקחים צירוף לינארי של העמודות שמצאנו קודם, ובודקים מתי הוא במרחב העצמי – כלומר מתי כפילתו ב-$(A-\lambda_i I)$ תיתן את וקטור האפס (2.2.2).

מצאנו צירוף לינארי כזה. כעת נסמן $u=\alpha_1 e_{i_1}+\cdots+\alpha_t e_{i_t}$ (ראה סימונים באלגוריתם, 2.2.3). המסלול $(A-\lambda_i I)^p u,\dots,(A-\lambda_i I)u,u$ הוא המסלול המבוקש (2.2.4) – כי נזכור ש-$Ae_r=C_r$ (העמודה ה-r).

זהו ההסבר ל-2.2+2.3. הורדת התלויות הלינאריות נעשית בגלל ההכלה.

נפסיק כאשר נקבל מספר וקטורים כולל (באיחוד המסלולים) השווה לריבוי האלגברי של λ_i, כיוון שהמימד של K_{λ_i} הוא הריבוי האלגברי (2.4).

כעת, נאחד את כל המסלולים שהתקבלו. נקבל בסיס B של V.

לאחר שהבנו כיצד מתנהג אופרטור נילפוטנטי, אופרטור S בעל ע״ע יחיד λ מתנהג בצורה דומה, כי $(S-\lambda I)$ אופרטור נילפוטנטי.

לפי הלמות שהוכחנו עבור מטריצות אלכסוניות בלוקים, נקבל שצורת הז׳ורדן של T היא ״השמת צורות הז׳ורדן של כל הבלוקים בבלוקים מתאימים״. כמו כן, הבסיס המז׳רדן הוא איחוד הבסיסים המז׳רדנים של כל בלוק.

לכן נקבל צורת ז'ורדן של A.

3. דוגמאות

ז'רדון מטריצה נילפוטנטית

ניקח את המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&-1\\0&0&0&0&1\\0&-1&0&-1&1\\1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

נשים לב ש-A נילפוטנטית, כי $A^4=0$. לכן:

$p_A(x)=x^5$
$m_A(x)=x^4$

הע"ע היחיד הוא 0.

נמצא בסיס ל-$V_0\cap C(A^3)$, לפי האלגוריתם:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&1&-1\\0&0&0&0&1\\0&-1&0&-1&1\\1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&1&-1\\0&0&0&0&1\\0&-1&0&-1&1\\1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\\-1&-1&-1&0&-1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&1&-1\\0&0&0&0&1\\0&-1&0&-1&1\\1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\\-1&-1&-1&0&-1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

העמודה החמישית פורשת את $C(A^3)$. עלינו לבדוק האם קיים α שיהיה הפתרון של המשוואה:

$A\cdot\alpha\cdot C_5=0$

ואכן, כל $\alpha\in\mathbb{F}$ הוא פתרון (קל לוודא כי $A\cdot C_5=0$). לכן נבחר $\alpha=1$. נסמן $u=1\cdot e_5=e_5$.

קיבלנו מסלול: $\{A^3e_5,A^2e_5,Ae_5,e_5\}$, ובצורה מפורשת $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. עדיין חסר לנו וקטור כדי להגיע לריבוי האלגברי של 0 (=5), לכן נמשיך.

נמצא בסיס ל-$V_0 \cap C(A^2)$, לפי האלגוריתם:

העמודה הראשונה והעמודה החמישית שתיהן פורשות את $C(A^2)$. נחפש α, β כך ש:

$$A \cdot (\alpha C_3 + \beta C_5) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

לכן נקבל כי עבור $\beta = 0$, יש לנו פתרון. נבחר $\alpha = 1$. נסמן $u = e_1$.

קיבלנו מסלול $\{A^2 e_1, Ae_1, e_1\}$ ובצורה מפורשת $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. עלינו להוריד תלויות לינאריות,

לכן נוריד את הוקטורים $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ונקבל שאיחוד המסלולים הוא הבסיס המז'רדן:

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. ואכן, המטריצה $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ היא המטריצה המז'רדנת של A (בדקו!).

ז'רדון מטריצה עם ע"ע יחיד

ניקח את המטריצה $A=\begin{pmatrix}6&0&1&-1.5\\0&6&-3.5&5.25\\0&0&7.5&-2.25\\0&0&1&4.5\end{pmatrix}$.

נחשב פולינום אופייני:

$$p_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix}x-6&0&-1&1.5\\0&x-6&3.5&-5.25\\0&0&x-7.5&2.25\\0&0&-1&x-4.5\end{pmatrix}\underset{col1}{=}(x-6)\det\begin{pmatrix}x-6&3.5&-5.25\\0&x-7.5&2.25\\0&-1&x-4.5\end{pmatrix}=$$

$$\underset{col1}{=}(x-6)^2\det\begin{pmatrix}x-7.5&2.25\\-1&x-4.5\end{pmatrix}=(x-6)^2\left((x-7.5)(x-4.5)+2.25\right)=(x-6)^2(x^2-12x+36)=(x-6)^4$$

לכן ל-A יש ע"ע יחיד: 6.

נחפש את הפולינום המינימלי. הוא מהצורה $m_A(x)=(x-6)^k$. $k\neq 1$ כי $A-6I\neq 0$. נבדוק האם $k=2$, כלומר האם $(A-6I)^2=0$:

$$(A-6I)^2=\begin{pmatrix}6-6&0&1&-1.5\\0&6-6&-3.5&5.25\\0&0&7.5-6&-2.25\\0&0&1&4.5-6\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&-1.5\\0&0&-3.5&5.25\\0&0&1.5&-2.25\\0&0&1&-1.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1&-1.5\\0&0&-3.5&5.25\\0&0&1.5&-2.25\\0&0&1&-1.5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0$$

לכן $m_A(x)=(x-6)^2$.

לפי האלגוריתם, עלינו למצוא בסיס ל-$V_6\cap C(A-6I)$.

נסתכל על $A-6I$: $\begin{pmatrix}0&0&1&-1.5\\0&0&-3.5&5.25\\0&0&1.5&-2.25\\0&0&1&-1.5\end{pmatrix}$. העמודות שלה ת"ל, לכן העמודה השלישית מהווה בסיס למרחב העמודות של $A-6I$. עלינו למצוא α כך ש-$A\cdot\alpha\cdot C_3=0$. אך תנאי זה מתקיים לכל $\alpha\in\mathbb{F}$, לכן נוכל לבחור $\alpha=1$ ולסמן $u=e_3$. קיבלנו את המסלול $\{(A-6I)e_3,e_3\}$, ובאופן מפורש $\left\{\begin{pmatrix}1\\-3.5\\1.5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

הריבוי האלגברי של הע"ע 6 הוא 4, ויש לנו בינתיים רק 2 וקטורים, לכן עלינו להמשיך בתהליך למציאת שני וקטורים נוספים.

לכן, עלינו למצוא בסיס ל-V_6. נפתור את המערכת ההומוגנית $(A-6I)v=0$ למציאת בסיס למרחב הפתרונות:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & -3.5 & 5.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & -2.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2+3.5R_1 \\ R_3-1.5R_1 \\ R_4-R_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

לכן הבסיס למרחב הפתרונות:

$x=t, y=s, z=1.5p, w=p$, כלומר קיבלנו את הוקטורים $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1.5\\1\end{pmatrix}\right\}$. עלינו להוריד תלויות לינאריות, לכן נוריד את הוקטור $\begin{pmatrix}0\\0\\1.5\\1\end{pmatrix}$, ונקבל שאיחוד המסלולים (בשלב האחרון אין צורך לפתוח מסלולים, כי $(A-6I)$ הוא בחזקת 0), שהוא הבסיס המז'רדן, הוא:

$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\-3.5\\1.5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$. ואכן, המטריצה $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ -3.5 & 0 & 0 & 1\\ 1.5 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ היא המטריצה המז'רדנת של A (בדקו!).

ז'רדון מטריצה עם כמה ע"ע שונים

ניקח את המטריצה $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6 & 5\\ -3 & -2 & -7 & -1\\ 1 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

ראשית, נמצא פולינום אופייני.

$$p_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix}x+1 & 2 & -6 & -5\\ 3 & x+2 & 7 & 1\\ -1 & -1 & x+2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & x+2\end{pmatrix}\underset{row4}{=}(-1)^{4+4}(x+2)\det\begin{pmatrix}x+1 & 2 & -6\\ 3 & x+2 & 7\\ -1 & -1 & x+2\end{pmatrix}=$$

$$\underset{row3}{=}(x+2)\left[(-1)^{3+1}(-1)\det\begin{pmatrix}2 & -6\\ x+2 & 7\end{pmatrix}+(-1)^{3+2}(-1)\det\begin{pmatrix}x+1 & -6\\ 3 & 7\end{pmatrix}+(-1)^{3+3}(x+2)\det\begin{pmatrix}x+1 & 2\\ 3 & x+2\end{pmatrix}\right]=$$

$$=(x+2)\{-[2\cdot 7+6(x+2)]+[7(x+1)+18]+(x+2)[(x+1)(x+2)-6]\}=$$

$$=(x+2)[-6x-26+7x+25+(x-1)(x+4)(x+2)]=(x+2)[(x-1)+(x-1)(x^2+6x+8)]=$$

$$=(x+2)(x-1)(x^2+6x+9)=(x+2)(x-1)(x+3)^2$$

לכן הע"ע הם $1,-2,-3$. נחפש פולינום מינימלי. יש שתי אפשרויות: הפולינום המינימלי או הורדת החזקה של $(x+3)$ ל-1. נבדוק האם $f(x)=(x-1)(x+2)(x+3)$ מאפס את A:

$$f(A)=(A-I)(A+2I)(A+3I)=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 6 & 5\\ -3 & -3 & -7 & -1\\ 1 & 1 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 6 & 5\\ -3 & 0 & -7 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2 & 6 & 5\\ -3 & 1 & -7 & -1\\ 1 & 1 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}10 & 10 & 2 & -32\\ -1 & -1 & 3 & 16\\ -5 & -5 & -1 & 16\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2 & 6 & 5\\ -3 & 1 & -7 & -1\\ 1 & 1 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -8 & -8 & 0\\ 4 & 4 & 4 & 0\\ 4 & 4 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\neq 0$$

לכן $m_A(x)=p_A(x)=(x-1)(x+2)(x+3)^2$.

נתחיל עם הע"ע $\lambda=1$. לפי האלגוריתם, עלינו לחפש בסיס עבור V_1 (כי החזקה בפולינום המינימלי היא 1). נחפש זאת על ידי פתרון מערכת המשוואות ההומוגנית $(A-I)v=0$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & 6 & 5 & 0 \\ -3 & -3 & -7 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1+2R_3 \\ R_2+3R_3 \\ R_4/(-3)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -13 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_1+3R_4 \\ R_3+4R_4 \\ R_2/(-13)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

לכן הפתרון הכללי הוא $x = t, y = -t, z = 0, w = 0$, כלומר קיבלנו את הוקטור $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. נפסיק

כאן כי הגענו לריבוי האלגברי של 1.

נעבור לע"ע -2. לפי האלגוריתם, עלינו לחפש בסיס עבור V_{-2}. נחפש זאת על ידי פתרון מערכת המשוואות ההומוגנית $(A + 2I)v = 0$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & -7 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2+3R_1 \\ R_3-R_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & 14 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+2R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

לכן הפתרון הכללי הוא $x = 9t, y = -5t, z = -4t, w = t$, כלומר קיבלנו את הוקטור $\left\{\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

נפסיק כאן כי הגענו לריבוי האלגברי של 2.

נעבור לע"ע -3. לפי האלגוריתם, עלינו לחפש בסיס עבור $C(A + 3I) \cap V_{-3}$.

נסתכל על $A + 3I$: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 5 \\ -3 & 1 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. נבחר עמודות הפורשות את מרחב העמודות של המטריצה, שהן העמודות הראשונה, השנייה והרביעית. כעת, נחפש α, β, γ שעבורם:

$$(A + 3I) \cdot (\alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_4) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 5 \\ -3 & 1 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 5 \\ -3 & 1 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\alpha-2\beta+5\gamma \\ -3\alpha+\beta-\gamma \\ \alpha+\beta-4\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} 4\alpha-4\beta+10\gamma+6\alpha-2\beta+2\gamma+6\alpha+6\beta-24\gamma+5\gamma \\ -6\alpha+6\beta-15\gamma-3\alpha+\beta-\gamma-7\alpha-7\beta+28\gamma-\gamma \\ 2\alpha-2\beta+5\gamma-3\alpha+\beta-\gamma+\alpha+\beta-4\gamma-4\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} 16\alpha-7\gamma \\ -16\alpha+11\gamma \\ -4\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}=0$$

לכן יש פתרון אם ורק אם $\alpha=\gamma=0$. נוכל לבחור $\beta=1$, ונסמן $u=e_2$. לכן קיבלנו מסלול $\{(A+3I)e_2, e_2\}$, ובצורה מפורשת $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. אין צורך להמשיך כי הגענו לריבוי האלגברי של -3.

קיבלנו בסיס מז'רדן $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. ואכן, אם נשים את איברי B בעמודות מטריצה $P=\begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, נקבל שהמטריצה הזו היא המטריצה המז'רדנת של A (בדקו!).