מבוא לתורת החבורות תרגיל 6 תשע"ח.

עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם היא נכונה, ואם לא מצא דוגמא נגדית:

1. מחלקה שמאלית היא ת"ח.
   (א) עבור חבורה ציקלית כל ת"ח היא נורמלית.
   (ב) אם N נורמלית ב G אז $GN = NG$.
   (ג) אם עבור ת"ח $N \leq G$ מתקיים $GN = NG$ אז N נורמלית.
   (ד) אם ת"ח H היא אבלית אז היא נורמלית.
   (ה) אם ת"ח H היא נורמלית אז היא אבלית.

   i. לא נכון. למשל $(12)\langle(23)\rangle \subset S_3$ היא לא ת"ח. למעשה חוץ מהמחלקה הטריוויאלית (H) מחלקות הן לא ת"ח שכן אין בהן את איבר היחידה.
   א'. נכון. צקלית היא בפרט אבלית.
   ב'. נכון.
   ג'. לא נכון. למשל $\langle(12)\rangle$ היא לא נורמלית בS_3 אבל $S_3\langle(12)\rangle = S_3\langle(12)\rangle$. למעשה תמיד מתקיים $GN = N = NG$ (למה?).
   ד'. לא נכון. ראו דוגמא קודמת.
   ה'. לא נכון. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ היא תח"נ של $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ אבל היא לא אבלית.

2. המרכז (center) של חבורה G היא הקבוצה

$$Z(G) = \{x \in G : \forall g \in G \ gx = xg\}$$

   (א) הוכיחו כי $Z(G)$ הוא ת"ח של G.

(ב) הוכיחו כי $Z(G)$ הוא ת"ח נורמלית בG.

(ג) הוכיחו כי אם $G \lhd N$ אזי $Z(N) = \{x \in N : \forall y \in N\, xy = yx\}$ היא תת־חבורה נורמלית של G.

שימו לב: אתם יודעים שהמרכז של חבורה הוא תת־חבורה נורמלית ולכן ברור ש $Z(N) \lhd N$. אבל אנחנו שאלנו אם זה נורמלי בG!

i. איבר היחידה בודאי נמצא במרכז.

סגירות לכפל: אם $x, y \in Z(G)$ צ"ל $xy \in Z(G)$ כלומר צריך להראות ש $g(xy) = (xy)g$ לכל $g \in G$. אמנם

$$g(xy) = (gx)y = (xg)y = x(gy) = x(yg) = (xy)g$$

סגירות להופכי: נניח $x \in Z(G)$ צ"ל $x^{-1} \in Z(G)$, כלומר צריך להראות ש $x^{-1}g = gx^{-1}$ לכל $g \in G$. אמנם

$$\begin{aligned} gx &= xg \\ g &= xgx^{-1} \\ x^{-1}g &= gx^{-1} \end{aligned}$$

א'. נראה שהמרכז הוא ת"חנ: יהי$g \in G$, אזי

$$gZ(G) = \{gx \,|\, x \in Z(G)\} = \{xg \,|\, x \in Z(G)\} = Z(G)g$$

ב'. צריך להוכיח שלכל $g \in G$ ולכל $x \in Z(N)$ מתקיים $gxg^{-1} \in Z(N)$.

כדי להראות את זה נוכיח שלכל $n \in N$ מתקיים $(gxg^{-1})\, n\, (gxg^{-1})^{-1}\, n^{-1} = e$ (למה זה שקול?).

$$\left(gxg^{-1}\right) n \left(gxg^{-1}\right)^{-1} n^{-1} = gx\left(g^{-1}ng\right)x^{-1}g^{-1}n^{-1} = g\left(g^{-1}ng\right)xx^{-1}g^{-1}n^{-1} = nn^{-1} = e$$

שימו לב ש $x\left(g^{-1}ng\right) = \left(g^{-1}ng\right)x$ כי x מתחלף עם כל איבר של N ו־ $g^{-1}ng \in N$ כי N היא תת־חבורה נורמלית.

3. תהי G חבורה ו$H \leq G$ תת־חבורה. נגדיר את הליבה של H בG להיות:

$$Core(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

.

(א) הראו כי $Core(H) \subseteq H$.

(ב) הוכיחו כי לכל $g \in G$, gHg^{-1} היא ת"ח של G. הסיקו כי $Core(H)$ היא ת"ח של G.

(ג) הוכיחו כי $Core(H)$ נורמלית בG.

i. מכיוון ו $H = eHe^{-1}$ מופיע בחיתוך, ברור ש $Core(H) \subseteq H$.

א'. נראה סגירות לכפל: $(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = gh_1(gg^{-1})h_2g^{-1} = gh_1h_2g^{-1} \in gHg^{-1}$.

נראה סגירות להופכי: $(ghg^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1}h^{-1}g^{-1} = gh^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$.

נראה שיש את איבר היחידה: $e = geg^{-1} \in gHg^{-1}$.

מכיוון וכל gHg^{-1} היא ת"ח, החיתוך של כולם הוא גם ת"ח. ולכן $Core$ הוא ת"ח.

ב'. ניקח $x \in Core(H)$ ו$g \in G$ ונראה ש $gxg^{-1} \in Core(H)$.

4. יהיו $H_1 \trianglelefteq G_1, H_2 \trianglelefteq G_2$. הוכיחו ש$H_1 \times H_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$.

הוכחה:

יהי $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ ו $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$. צריך להוכיח ש$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1g_2)^{-1} \in$ $H_1 \times H_2$/

ובכן, $(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} = (g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1h_1g_1^{-1}, g_2h_2g_2^{-1}) \in$ $H_1 \times H_2$ מכיוון ש H_1 ו H_2 סגורות להצמדות.

5. יהיו $f_1 : G \to H, f_2 : H \to K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו כי $f_1 \circ f_2 : G \to K$ הוא הומומורפיזמם.

הוכחה:

יהיו $g, h \in G$. אזי: $f_2 \circ f_1(gh) = f_2(f_1(gh)) = f_2(f_1(g)f_1(h)) = f_2(f_1(g))f_2(f_1(h)) = f_2 \circ f_1(g) \cdot f_2 \circ f_1(h)$.

6. קבעו האם ההעתקות הבאות הן הומומורפיזם/מונומורפיזם/אפימורפיזם/איזומורפיזם:

(א) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(x) = x^2$.

פתרון:

הומורופזימם: $f(xy) = (xy)^2 = x^2y^2 = f(x)f(y)$/

ברור שהוא לא על (יש מספרים מרוכבים שאין להם שורש ממשי) ולא חח"ע (1 ו-1 הולכים לאותו מקום)

(ב) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f(x)=x^2$.
פתרון:
לא הומומורפיזם. $f(1+1)=f(2)=4$ ואילו $f(1)+f(1)=1+1=2$.

(ג) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$, $f(x)=(x \mod n, x \mod n)$.
פתרון:
כן הומומורפיזם

$$f(x+y)=((x+y) \mod n,(x+y) \mod n)=(x \mod n+y \mod n, x \mod n+y \mod n)=$$

$$(x \mod n, y \mod n)+(x \mod n, y \mod n)=f(x)+f(y)$$

לא חח"ע כי $f(n,n)=(0,0)=f(0,0)$
ולא על, כי בתמונה יש רק זוגות שבהם שני הרכיבים זהים.

(ד) $f:G\to G$ $f(g)=g^{-1}$ עבור חבורה כלשהי G.
פתרון:
זה יהיה הומורפיזם אמ"ם לכל $g,h\in G$ $h^{-1}g^{-1}=(gh)^{-1}=f(gh)=f(g)f(h)=g^{-1}h^{-1}$. מכיוון שכל איבר בחבורה הוא ההופכי של איבר אחר (כי הוא ההופכי של ההופכי שלו) זה שקול לכך שלכל $g,h\in G$ $hg=gh$. כלומר, זה יהיה הומומורפיזם אמ"ם G אבלית. ברור שההעתקה היא חח"ע ועל, כי היא ההופכית של עצמה. $f\circ f(g)=f(f(g))=f(g^{-1})=(g^{-1})^{-1}=g$. לכן עבור חבורה אבלית זהו איזומורפיזם.

7. הוכיחו שאם G חבורה נוצרת סופית ויש הומומורפיזם $f:G\to H$ אז $im(f)$ נוצרת סופית.
הוכחה:

נניח שG נוצרת ע"י $\{g_1,...,g_n\}$. זה אומר שכל איבר בG הוא מהצורה $\Pi g_i^{k_i}$ כאשר הg_i לא בהכרח שונים. (למשל, יש איבר $g_1^3g_2^{-1}g_1$) נוכיח ש$Im(f)$ נוצרת ע"י $\{f(g_1),...,f(g_n)\}$. ובכן, יהי $h\in Im(f)$. אזי

$$h=f(g)=f(\Pi g_i^{k_i})=\Pi f(g_i)^{k_i}$$

מש"ל.

8. הפריכו או הביאו דוגמא לשאלות הבאות:

(א) קיים אפימורפיזם $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$. (רמז: העזרו בשאלה הקודמת)
פתרון: לא קיים, מכיוון ש$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ נוצרת סופית, ואילו $\mathbb{Q}$ לא נוצרת סופית. (הוכחנו באחד התרגולים)

(ב) קיים מונומורפיזם $f:S_4\to S_5$.
פתרון: קיים. נשלח כל תמורה ל"עצמה", כלומר לאותה הפונקציה בדיוק על $\{1,..,4\}$ שאת 5 משאירה במקום. למשל $(1,2,3,4)$ הולך ל$(1,2,3,4)$ רק שבS_5 התמורה הזאת בעצם מסמלת את התמורה $(1,2,3,4)(5)$. קל לראות שזה הומומורפיזם ושהוא חח"ע.

(ג) קיים אפימורפיזם $f:\mathbb{Z}_{50}\to\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_{10}$
פתרון: לא קיים, כי $\mathbb{Z}_{50}$ ציקלית, ואילו $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_{10}$ לא ציקלית. אפשר לראות את זה כי למשל הסדר של כל איבר ב $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_{10}$ הוא לכל היותר 10.

9. יהי $f:G\to H$ הומומורפיזם, ונניח ש G חבורה אבלית. הוכיחו כי $Im(f)$ אבלית.
הוכחה:

יהיו $f(g)$ ו $f(h)$ שני איברים בתמונה. (שימו לב שכל איבר בתמונה הוא מהצורה f של משהו.) אזי $f(g)f(h)=f(gh)=f(hg)=f(h)f(g)$ מש"ל.