

מבחן לדוגמא – מבוא לאנליזה 1 למורים

משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{n^n}{n!} \right) \quad \text{ג.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{\sqrt{2x^2+2}-(x+1)} \quad \text{ב.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \ln(\cos(x))}{x^2 \cdot 2^x} \quad \text{א.}$$

$$2. \quad \text{נביט בפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

א. עבור אילו ערכי  $x$  הפונקציה רציפה?

ב. מצאו את הנגזרת  $f'$  בכל נקודה בה היא מוגדרת.

ג. עבור אילו ערכי  $x$  הנגזרת  $f'$  רציפה?

3.

א. מצאו את הערך המקסימלי של הפונקציה  $\frac{2x}{1+x^2}$  בציר הממשיים.

ב. הוכיחו כי לכל  $x > 0$  מתקיים  $0 < \ln(1+x^2) \leq x$ .

4. תהי  $f$  פונקציה רציפה וחיובית בכל הממשיים, המקיימת  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

א. הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = -\infty$ .

ב. הוכיחו כי קיימת נקודה בה  $f(c) = c$ .

5. תהי סדרה מונוטונית חיובית  $a_n$  כך ש  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = 3$ .

א. הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

ב. נניח כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}$  מצאו את  $L$ .