מרצה: מיכאל מגרל megereli@math.biu.ac.il אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 11

הגדרה: נניח $\alpha = \{A_i\}_{i\in I}$ אוסף תת קבוצות בקבוצה X.

א) $\boldsymbol{\alpha \in FIP}$ תכונת החיתוך הסופי, אם $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$ לכל $J \subseteq I$ **סופית**.

ב) $\boldsymbol{\alpha \in IP}$ אם $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.

(ברור ב $\Rightarrow$ א).

דוגמה: כל סדרה $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ יורדת $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ של קבוצות לא ריקות היא FIP

למשל: $A_n := \{n, n+1, n+2, \ldots\}, n \in \mathbb{N}$

$$\alpha = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in FIP \backslash IP$$

קריטריון FIP של $Comp$: נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Comp$.

2) $$\begin{cases} FIP \ni \alpha = \{A_i\}_{i\in I} \\ \forall i \in I: \text{סגורה } A_i \end{cases} \Rightarrow \alpha \ni IP$$

הסבר:

שימו לב ש $\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X אם ורק אם האוסף של המשלימים $\{O_i^c\}_{i\in J}$ (קבוצות סגורות) הוא לא מקיים IP.

$$\bigcup O_i = X \leftrightarrow \bigcap O_i^c = \emptyset$$

כללי de Morgan והגדרת $Comp$...

■

<u>דוגמה:</u> $\mathbb{R} \notin Comp$ (דרך FIP).

$A_n := [n, \infty), n \in \mathbb{N}$ סגורות ו- $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$

$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in FIP \backslash IP$$

<u>דוגמה:</u> $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \notin \mathrm{Comp}$

$A_k = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, k \le n\}$ **סגור** ב Y $\qquad A_1 \supset A_2 \supset \cdots \qquad \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \varnothing$.

הערה: באופן דומה אפשר להפריך קומפקטיות כשיש סדרה ללא תת סדרה מתכנסת.

תזכורת: [קריטריון החיתוך $Cantor$ לשלמות] **(מאינפי):**

התנאים הבאים שקולים:

א) (X,d) מ"מ <u>שלם</u>.

ב) לכל סדרה יורדת $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\qquad A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$

של קבוצות <u>סגורות</u> כך ש $diam(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ מתקיים

$$\{c\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$$

<u>משפט:</u> כל מרחב מטרי (X,d) קומפקטי הוא מ"מ שלם.

<u>הוכחה:</u> (דרך קריטריון קנטור + קריטריון FIP)

נניח נתונה סדרה יורדת של קבוצות סגורות $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - $\quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$

כך ש $diam(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. אז

$$\alpha = \{A_n\} \in FIP$$

A_n סגור. לכן בגלל הקומפקטיות אכן $\bigcap_{n\in I} A_n \neq \emptyset$.

$$\Downarrow$$

$$\alpha \in IP$$

ואז מקריטריון קנטור נקבל המרחב הוא שלם.

■

<u>משפט $(Heine - Borel)$:</u>

נניח $X \subseteq \mathbb{R}^n$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Comp$.

2) X חסום וסגור.

<u>הוכחה:</u>

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u>

<u>חסימות</u>. כל מ"מ קומפקטי הוא חסום (הוכחנו יותר: ח"כ)

<u>סגירות</u>. $\mathbb{R}^n \in T_2$. נפעיל את משפט הסגירות.

<u>$(2) \Rightarrow (1)$:</u>

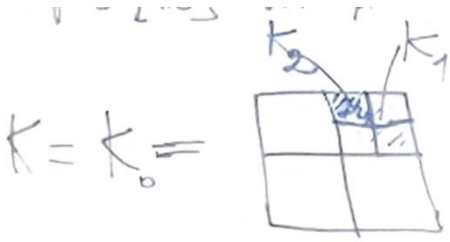
נניח X חסום וסגור. קיימת קובייה $K \subset \mathbb{R}^n$ כך ש $X \subseteq K$

<u>דרך א':</u> בה"כ $K = [a,b]^n$

אז לפי $Tychonoff$, אכן $K \in Comp$ (אם ידוע ש - $[a,b] \in Comp$).

<u>דרך ב' $(Cantor)$:</u>

נניח בשלילה ש - $K \notin Comp$.



ז"א יש כיסוי α פתוח של K ללא תת כיסוי סופי. נחלק תתי קוביות (מספר = 2^n) דרך החלוקה של הצלעות. נקרא לתת קובייה – "קובייה בעייתית" אם אין תת כיסוי סופי עבור הכיסוי הנ"ל. אז יש לפחות תת קובייה אחת בעייתית K_1.

באופן דומה נחלק לתתי קוביות ואז יש תת קובייה $K_2 \subset K_1$ כך ש - K_2 בעייתית.

אז נקבל – $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$

סדרה יורדת של קוביות (סגורות לא ריקות).

$diam(K_i) \to 0$

$\mathbb{R}^n$ שלם, לכן לפי קריטריון קנטור: יש איבר משותף $\{c\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$

$c \in K$. לכן קיים איבר מסוים של הכיסוי $O_j \in \alpha$ כך ש – $c \in O_j$

בגלל הפתיחות $\exists r > 0 : B_r(c) \subset O_j$

לכן – $\exists m \in \mathbb{N} : c \in K_m \subset B_r(c) \subset O_i$

קיבלנו ש K_m מכוסה ע"י איבר אחד O_i של הכיסוי.

לכן K_m לא בעייתית בסתירה לבנייה!

■

<u>הערה:</u> משפט $Heine - Borel$ לא נכון אם מחליפים $\mathbb{R}^n$ במרחבים מטריים או נורמיים אחרים (אפילו למרחב הילברט)

<u>דוגמה:</u> במרחב הילברט l_2 יש תת קבוצה חסומה וסגורה לא קומפקטית.

למשל: $A := \{e_1, e_2, \ldots\} \subset l_2$ (דיסקרטי אינסופי לכן לא קומפקטי).

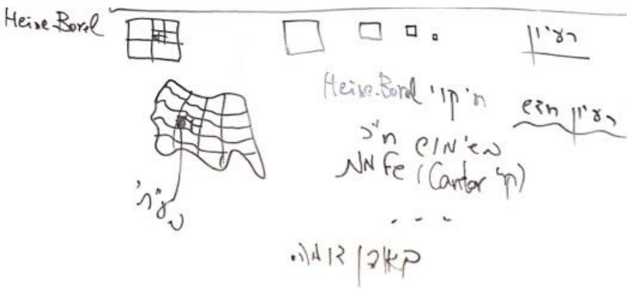
<u>משפט (קומפקטיות במרחב מטרי):</u> נניח (X,d) מ"מ. התנאים הבאים שקולים:

1) $X = \big(X, top(d)\big) \in Comp$.

2) $X \in SComp$ (לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת).

3) $X \in BW$ (תכונת Bolzano-Weierstrass לכל קבוצה <u>אינסופית</u> ב- X יש נקודת הצטברות).

4) (X,d) שלם וחסום כליל.



<u>הוכחה:</u>

<u>$(4) \leftarrow (1)$:</u>

דומה למשפט $Heine - Borel$

(נדלג על הוכחה מפורשת)

<u>$(1) \leftarrow (2)$:</u>

נניח בשלילה שלא, כלומר $X \notin SComp$.

זאת אומרת, קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ללא ת"ס מתכנסת ב – X.

נגדיר $\emptyset \neq A_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$

ברור $A_1 \supset A_2 \supset \cdots A_n \supset \cdots$ לכן $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in FIP$.

<u>הערה:</u> A_n סגורות. זה נובע מ –

1) <u>במ"מ</u> ידוע ש - $cl(A) = scl(A)$.

2) פרמוטציה של סדרה לא משפיעה על ההתכנסות (או אי התכנסות)

(כאשר אנו משתמשים בהגדרת התכנסות דרך – בכל כדור של הגבול יש <u>כמעט כל האיברים</u>).

כעת $\begin{cases} X \in Comp \\ FIP \ni \{A_n\} \end{cases} \Rightarrow \{A_n\} \in IP$

זה גורר שקיימת נקודה $c \in \bigcap A_n \neq \emptyset$.

לכן קיימת תת סדרה קבועה $c, c, \dots$ של הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (בסתירה להנחה שאין ת"ס מתכנסת).

<u>$(2) \leftarrow (3)$:</u>

נניח $A \subseteq X$ <u>אינסופית</u>. צ"ל $A' \neq \emptyset$.

בגלל אינסופיות קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב – A עם איברים <u>שונים</u>.

$X \in SComp \Leftarrow$ קיימת תת סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ שמתכנסת ב – X.

$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = b \wedge a_{n_k}$ שונים

$\Downarrow$

$$b \in A'$$

$$\Downarrow$$

$$A' \neq \emptyset$$

<u>$(3) \leftarrow (2)$:</u>

נניח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב X. נוכיח שיש ת"ס מתכנסת.

נגדיר $\quad \{x_n : n \in \mathbb{N}\} =: A \subset X \quad$ (תמונה של הסדרה).

אם A <u>סופית</u> אז יש איבר בסדרה שחוזר אינסוף פעם ואז יש תת סדרה קבועה (מתכנסת!).

אם A <u>אינסופית</u> אז לפי הנתון (3): $X \in BW$.

אז קיימת נקודת הצטברות $z \in A'$.

(*) אז קיימת סדרה עם איברים שונים ב A ששואפת ל z.

ע"פ אותה הערה על הפרמוטציות...

בה"כ ניתן להניח שיש <u>תת סדרה</u> של $\{x_n\}$ המקיימת את (*).

לכן קיבלנו ת"ס מתכנסת!

<u>$(2) \leftarrow (4)$:</u>

- קודם כל נוכיח <u>שלמות</u> של (X, d)

נניח $\{x_n\}$ <u>סדרת קושי</u>. צ"ל שהיא מתכנסת.

תכונה (2) $\Leftarrow$ יש תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ שמתכנסת ב – X.

תכונה m_3 של מרחבים מטריים $\Leftarrow$ אם לסדרת קושי יש ת"ס מתכנסת, אז גם הסדרה מתכנסת.

- כעת נוכיח ש (X, d) ח"כ.

צ"ל שלכל $\varepsilon > 0$ יש תת קבוצה סופית שהיא ε– צפופה (רשת).

נניח בשלילה שקיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שאין ε_0 – רשת. בונים סדרה ללא ת"ס מתכנסת:

ניקח $x_1 \in X$ אז $X \neq B_{\varepsilon_0}(x_1)$ (אחרת $\{x_1\}$ ε_0 – רשת ב (X, d)).

ניקח $x_2 \neq B_{\varepsilon_0}(x_1)$. אז מתקיים – $B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup B_{\varepsilon_0}(x_2) \neq X$

אחרת $\{x_1, x_2\}$ ε_0 – רשת (שימו לב: $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$).

נמשיך כך... נקבל סדרה $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

$$\forall i \neq j : d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_0$$

אז ברור שאף ת"ס של $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא ס"ק .

זה גורר שלסדרה הנ"ל אין ת"ס מתכנסת!

■

קומפקטיות של מכפלה טופולוגית

משפט: (tube lemma)

נניח X,Y מרחבים טופולוגיים, Y קומפקטי, $a\in X$. אז לכל סביבה פתוחה $\{a\}\times Y\subset N$ (במכפלה $X\times Y$) של הפיסה $\{a\}\times Y$ קיימת קבוצה פתוחה $W\subset X$ מספיק קטנה כך ש $\{a\}\times Y\subset W\times Y\subset N$.

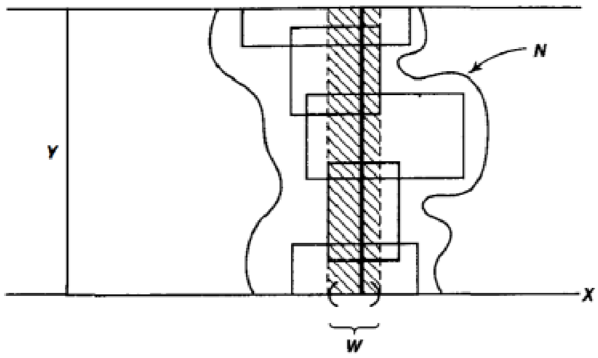
הוכחה: "מלבנים פתוחים" הם בסיס לטופולוגית מכפלה $\tau_{\prod}$ לכן לכל $y\in Y$ קיימות סביבות פתוחות $a\in U_y$ (ב X), $y\in V_y$ (ב Y) כך ש

$$(a,y)\in U_y\times V_y\subset N$$

$\{V_y : y\in Y\}$ כיסוי פתוח של Y. בגלל הקומפקטיות של Y יש מספר סופי של איברים $y_1,y_2,\cdots,y_n\in Y$ כך ש $V_{y_1}\cup V_{y_2}\cup\cdots\cup V_{y_n}=Y$.

נגדיר $W:=U_{y_1}\cap U_{y_2}\cap\cdots\cap U_{y_n}$ (סביבה פתוחה ל a ב X). אזי

$$\{a\}\times Y\subset W\times Y\subset N.$$



■

משפט (קומפקטיות של מכפלה סופית): אם X,Y קומפקטי אז גם $X\times Y$.

הוכחה: נניח Ω כיסוי פתוח של $X\times Y$. לכל $x\in X$ הפיסה $\{x\}\times Y\simeq Y$ ת"ק קומפקטית ב $X\times Y$. לכן קיים תת אוסף **סופי** Ω_x שמכסה את $\{x\}\times Y$. אז

$$\{x\}\times Y\subset\cup\Omega_x$$

לפי "משפט צינור" קיימת קבוצה פתוחה $W_x\subset X$ כך ש

$.\{x\}\times Y\subset W_x\times Y\subset \cup\Omega_x$

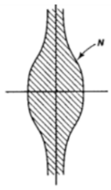
בגלל הקומפקטיות של X קיימים מספר סופי איברים $x_1,\cdots,x_n\in X$ כך ש

$.W_{x_1}\cup\cdots\cup W_{x_n}=X$

אז נקבל שתת אוסף **סופי** $\Omega_{x_1}\cup\cdots\cup\Omega_{x_n}$ של Ω מכסה את $X\times Y$.

■

תרגיל: תנו דוגמה נגדית למשפט הצינור אם Y לא קומפקטי. רמז:



<u>משפט טיכונוף</u> (1935) Tychonoff Theorem

נניח $X=\prod_{i\in I}X_i$ מכפלה טופולוגית. אזי X קומפקטי אם ורק אם כל X_i קומפקטי.

הוכחה:

(כוון אחד)

אם X קומפקטי אז כל X_i היא גם קומפקטי כתמונה רציפה של X לגבי העתקת ההטלה: $p_i:X\to X_i$.

(כוון שני)

דרך א. בעזרת קריטריון קומפקטיות Alexander (דרך תת בסיס).

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות דרך FIP (תכונת החיתוך הסופי).

<u>קריטריון קומפקטיות Alexander</u> :

נניח X מרחב טופולוגי ו β תת בסיס (פרה-בסיס) של הטופולוגיה. אזי X קומפקטי אם ורק אם לכל כיסוי $C\subset\beta$ של X (דרך איברים של β) קיים תת כיסוי סופי.

<u>הוכחה של הקריטריון</u>: (**<u>נדלג על ההוכחה</u>**)

כיוון אחד ברור (הגדרה של הקומפקטיות).

כיוון שני: נניח מ"ט X ופרה-בסיס שלו β מקיימים את התנאי של Alexander.

צ"ל ש X קומפקטי. נניח בשלילה שלא. אז קיים כיסוי פתוח C של X ללא תת כיסוי סופי.

נקרא לכיסוי פתוח "בעייתי" אם אין תת כיסוי סופי.
בה"כ ניתן להניח ש C הוא כיסוי בעייתי *מכסימלי*.
הערה: *מכסימליות* פירוש הדבר – אין גדול ממנו (ולא בהכרח הכי גדול) ז"א כל כיסוי פתוח של X המכיל את C ושונה ממנו הוא לא בעייתי.
<u>הסבר:</u> על מנת להוכיח הקיום של כיסוי כזה נשתמש בלמה של צורן.
שימו לב שאם נתון שרשרת של כיסויים בעייתים אזי האיחוד הוא גם בעייתי.
בגלל המכסימליות של C הוא מקיים את התכונה הבאה:
(*) אם O קבוצה פתוחה שלא שייכת ל C אז $C \cup \{O\}$ לא בעייתי ולכן קיים תת אוסף סופי C_0 של C כך ש $C_0 \cup \{O\}$ מכסה את X.
האוסף $C \cap \beta$ הוא לא מכסה את X
(אחרת תנאי של Alexander גורר ש C לא בעייתי).
לכן קיימת נקודה $z \in X$ כך ש z לא מכוסה ע"י $C \cap \beta$.
קיים $U \in C$ כך ש $z \in U$ (כי C כיסוי).
לפי הגדרת תת בסיס ($\beta^{\cap_F}$ הוא בסיס) קיימים מספר סופי של איברים
$S_1, \cdots, S_n \in \beta$ כך ש $z \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subset U$.
אף $S_1, \cdots, S_n$ לא שייך ל C (כי אחרת $C \cap \beta$ מכסה את z).
לכן ע"פ תכונת (*) הנ"ל לכל $1 \le i \le n$ קיים תת אוסף סופי C_i כך ש $C_i \cup \{S_i\}$ מכסה את X.
נסמן: $G_i := \cup\{A : A \in C_i\}$. אז $S_i \cup G_i = X$ ונקבל

$$U \cup (\bigcup_{i=1}^{n} G_i) \supseteq (\bigcap_{i=1}^{n} S_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} G_i) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} (S_i \cup G_i) = X$$

ז"א תת אוסף סופי $\bigcup_{i=1}^{n} C_i \cup \{U\}$ של C מכסה את X. סתירה ! זה מוכיח את הקריטריון.

<u>בעזרתו נוכיח כיוון שני של משפט Tychonoff</u>

בתפקיד של פרה-בסיס β ב $X = \prod_{i \in I} X_i$ ניקח **תיבות אלמנטריות**.

$\alpha := \{p_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i\}$ פרה-בסיס סטנדרטי. המקורות של קבוצות פתוחות מכל גורם X_i. נניח בשלילה ש X לא קומפקטי. אז לפי קריטריון Alexander קיים תת אוסף C של α כך ש C הוא **כיסוי בעייתי** (ללא תת כיסוי סופי) של X. נציג אותו $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ כאשר כל C_i מורכב מתיבות אלמנטריות שבאות מגורם X_i. לפי ההנחה C_i לא מכיל תת כיסוי סופי של X. אזי $p_i(C_i)$ לא מכיל תת כיסוי סופי של X_i (אחרת, מקורות מתאימים כיסוי סופי של X).

אבל X_i קומפקטי ו- $p_i(C_i)$ אוסף של קבוצות **פתוחות**. לכן $p_i(C_i)$ הוא לא כיסוי של X_i קיימת נקודה $x_i \in X_i$ שלא מכוסת ע"י $p_i(C_i)$. אזי הנקודה $x := (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i$ לא מכוסת ע"י (כיסוי) C של X. סתירה ! מכאן מש"ל.

☺

הערה: כיוון שני אפשר להוכיח בדרכים נוספות:

דרך ב. בעזרת קריטריון קומפקטיות FIP (תכונת החיתוך הסופי)

דרך ג. ואולטרה-פילטרים (על-מסנן).
ראו: *טופולוגיה קבוצתית*, האוניברסיטה הפתוחה (ד. לייבוביץ).

תוצאות:

- $[0,1]^S \in Comp$ קוביית Tychonoff (לכל קבוצה S)
- $[0,1]^{\mathbb{N}} \in Comp$ קוביית Hilbert

תרגיל: הוכיחו ש $f:[0,1]^{\mathbb{N}} \to l_2,\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=((x_{1,},\frac{1}{2}x_2,\cdots,\frac{1}{n}x_n,\cdots)$
שיכון טופולוגי של קוביית הילברט לתוך מרחב הילברט. רמז: מ"ל רציפות (מדוע ?)

- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}=\{0,1\}\times\{0,1\}\times\cdots\in Comp$ קוביית Cantor

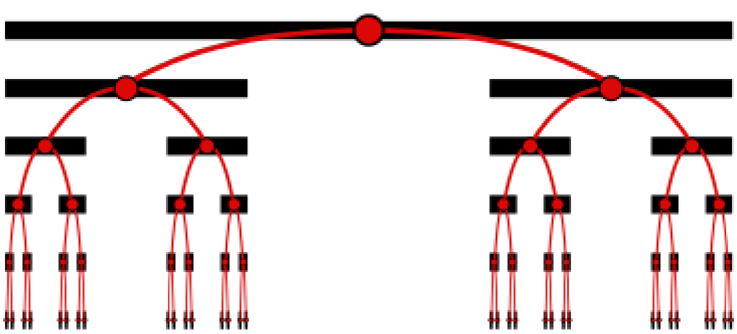
דוגמה חשובה (מרחב קנטור)

תזכורת: ידוע שקבוצת קנטור היא $C:=\{c\in[0,1]: c=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{3^i} \quad c_i\in\{0,2\}\}$.

$C=\bigcap_n C_n \quad C_0=[0,1],\ C_n=\frac{1}{3}C_{n-1}\cup(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_{n-1})$ חיתוך של קבוצות סגורות

משפט: קבוצת קנטור C הומיאומורפי עם מרחב מכפלה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}=\{0,1\}\times\{0,1\}\times\cdots$.

הוכחה: ש"ל $C\simeq\{0,2\}^{\mathbb{N}}$.



נגדיר פונקציה $f(x_1,x_2,\cdots)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i}$ $\quad f:\{0,2\}^{\mathbb{N}}\to C$.

אזי f חח"ע (יחידות ההצגה הנ"ל). f גם פונקציה על (ברור).

$\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ קומפקטי לפי משפט Tychonoff.

לכן בגלל משפט על ההומיאומורפיזם מ"ל f רציפה בכל נקודה $a=(a_1,a_2,\cdots)\in\{0,2\}^{\mathbb{N}}$

מ"ל לכל $\varepsilon>0$ קיימת סביבה $O\in N(a)$ כך ש

$$x\in O\Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

נבחר $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש $\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{2}{3^i}<\varepsilon$ ונגדיר תיבה בסיסית

$$O:=\{a_1\}\times\{a_2\}\times\cdots\times\{a_{n_0}\}\times\{0,2\}\times\{0,2\}\times\cdots$$

אז ברור $O\in N(a)$ ולכל $x=(a_1,a_2,\cdots,a_{n_0},x_{n_0+1},x_{n_0+2},\cdots)\in O$ מתקיים:

$$|f(x)-f(a)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right|=\left|\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right|\le\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{2}{3^i}<\varepsilon$$

■

תרגיל: הוכיחו ש:

1. $C^2\simeq C, C^n\simeq C, C^{\mathbb{N}}\simeq C^{\mathbb{Z}}\simeq C$.
2. * C הומוגני.

מידע נוסף על קבוצת קנטור (Cantor set everywhere) :

- כל מרחב קומפקטי מטריזבילי הוא תמונה רציפה של קבוצת קנטור.
- למשל: $(x_i\in\{0,2\})$ $\quad f(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{2}\cdot\frac{1}{2^i}$ $\quad f:C\to[0,1]$ (מדוע היא לא חח"ע ?)
- כל מרחב מטרי קומפקטי מטריזבילי בעל מימד אפס ללא נקודות מבודדות הומיאומורפי עם קבוצת קנטור (למשל השלמת $(\mathbb{Z},d_p)$).
- מרחב קנטור $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ חשוב גם באינפורמטיקה, תורת הקודים, https://peerj.com/articles/cs-171.pdf
במערכות דינמיות סימבוליות ...
"shift homeomorphism $\sigma:\{0,1\}^{\mathbb{Z}}\to\{0,1\}^{\mathbb{Z}},\sigma(x_i)=(x_{i+1})$
(תבדקו שיש מסלול צפוף לפעולת חבורה ציקלית $G=<\sigma>=\{\sigma^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ על $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$)

ראו גם: https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set