תרגיל 10

להגשה עד 22.1.18

תזכורת: $l^2 := L^2(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}), \eta)$, באשר: $\eta = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$ (מידת הספירה).

שאלה 1

יהי $\mathcal{H}$ מרחב הילברט ו־$\mathcal{M}$ תת מרחב לינארי סגור של $\mathcal{H}$. הוכיחו כי: $\mathcal{M} = (\mathcal{M}^\perp)^\perp$.

שאלה 2

נגדיר: $F := \{(a_n)_\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \mid \sup_n n|a_n| < \infty\}$.
הוכיחו או הפריכו:

1. F תת מרחב לינארי של l^2.
2. הקבוצה $F \cap l^2$ סגורה בl^2.

שאלה 3

יהיו:

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,2,0,0,0,\ldots) \\ u_2 &= (0,1,2,0,0,\ldots) \\ u_3 &= (0,0,1,2,0,\ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

1. הוכיחו כי המערכת $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ אינה שלמה במרחב l^2.
2. נסמן: $U = \operatorname{span}\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $V = \operatorname{span}\{(1,0,0,\ldots)\}$.
   האם $U + V$ צפוף ב l^2?

שאלה 4

יהי $\mathcal{H}$ מרחב הילברט עם בסיס בן מניה ותהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$.
נתון כי $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, וכי לכל $y \in \mathcal{H}$ מתקיים: $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$.
הוכיחו כי: $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

שאלה 5

תהי: $E = \{(x_n) \in l^2 \mid \forall n \geq 1 : x_{2n-1} = x_{2n}\}$.

1. הוכיחו כי E תת מרחב סגור של l^2.
2. מצאו את $E^\perp$.
3. יהי $x \in l^2$. מצאו את הקירוב הטוב ביותר של x ל-E.

בהנאה ☺