תרגיל בית 6 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1 (חזרה)**.** יהיו R, S חוגים. נניח שקיים הומומורפיזם $\varphi : R \to S$. הראו כי

$^{R[x]}/_{(\ker\varphi)[x]} \cong (\operatorname{Im}\varphi)\,[x]$.

(בהרצאה ראיתם את זה במקרה של ההטלה הטבעית $R \to {}^{R}/_{I}$.)

שאלה 2. יהי $D \in \mathbb{Z}$. הוכיחו ששדה השברים של $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ הוא $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$.

שאלה 3.

א. הוכיחו כי $\langle x^2 - 2 \rangle$ הוא אידאל ראשוני ב-$\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

ב. מהו האידאל המקסימלי M במיקום $\mathbb{Z}\left[x\right]_{\langle x^2-2\rangle}$? מצאו יוצר שלו.

ג. לאיזה שדה איזומורפי $^{\mathbb{Z}[x]_{\langle x^2-2\rangle}}/_{M}$?

שאלה 4. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right] = S^{-1}\mathbb{Z}$ כאשר $S = \left\{n^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$ בדומה למה שעשינו בכיתה. יהי p מספר ראשוני.

א. הוכיחו שלא קיים חוג $\mathbb{Z} \subsetneq R \subsetneq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ המוכל ממש בין החוגים.

ב. הוכיחו שאם $m|n$, אז $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right] \subseteq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$. הוכיחו שאם $n \nmid m^k$ לכל $k \in \mathbb{N}$, אז זו הכלה ממש.

ג. מצאו סדרת מספרים $n_1, n_2, n_3, \ldots$ כך שתהיה הכלה ממש בשרשרת החוגים

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n_1}\right] \subsetneq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n_2}\right] \subsetneq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n_3}\right] \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{Q}$$

שאלה 5. תנו דוגמה לתחום אוקלידי R עם פונקציה אוקלידית d ואיברים a, b המקיימים $d(a) = d(b)$, אבל $\langle a \rangle \neq \langle b \rangle$.

שאלה 6. חשבו בעזרת אלגוריתם אוקלידס את מחלק משותף מקסימלי $(f(x), g(x))$ של זוגות האיברים הבאים. אפשר לבחור שהוא יהיה פולינום מתוקן.

א. $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$ בחוג $\mathbb{Q}[x]$.

ב. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 3$, $g(x) = x^2 - 1$ בחוג $\mathbb{F}_5[x]$.

שאלה 7. יהי R תחום שלמות, ותהי פונקציה $d: R \to \mathbb{N} \cup \{0, -\infty\}$ המקיימת $d(0) < d(x)$ לכל $x \neq 0$.

נניח שהיא מקיימת את התנאי הראשון שראינו בכיתה לאוקלדיות: לכל $b \neq 0$ ולכל a קיימים $q, r \in R$ כך ש-$a = qb + r$ וגם $d(r) < d(b)$.

הפונקציה לא בהכרח מקיימת את התנאי השני: אם $a|b$, אז $d(a) \leq d(b)$. הוכיחו שבמקרה זה R הוא עדין תחום אוקלידי. הדרכה: הראו שהפונקציה

$$\delta(a) = \min \{d(ax) \mid 0 \neq x \in R\}$$

היא פונקציה אוקלידית. במילים: $\delta(a)$ שווה לערך המינימלי של d מבין האיברים שאינם אפס באידאל $\langle a \rangle$.

שאלה 8. העשרה: קראו את המאמר "חוגי שברים בדרך הקשה" מאת ז'וזה פליפה ולוש ובדקו שזה למעשה יותר קל.

בהצלחה!