תרגול 13

6 בינואר 2014

תזכורת: A מטריצה $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|$ הפולינום האופני שלה . $Av=\lambda v$, $v\neq 0$ ו"ע, λ ע"ע.
ר"ג של λ_0הוא $dim[N(A-\lambda_0 I)]$, ר"א= המעלה המקס' של $\lambda-\lambda_0$. מתקיים ר"א $\leq$ר"ג

תרגיל: יהיו A,B שתי מטריצות הוכח: ע"ע של BA שווים לע"ע של AB.

הוכחה: תרגיל (פצל למקרים אם $\lambda=0$ ואם $\lambda\neq 0$)

אם $\lambda=0$ ע"ע עצמי של BAאזי BA לא הפיכה ואז AB לא הפיכה ואז $\lambda=0$ ע"ע גם של AB

אם $\lambda\neq 0$ אזי כיוון שהוא ע"ע של BA קיים $v\neq 0$ כך ש $BAv=\lambda v$ ואז $(AB)Av=A(BAv)=A\lambda v=\lambda Av$

כלומר Av (שונה מאפס־למה?) ו"ע של AB עם אותו ע"ע.

תרגיל: תהא A מטריצה יהיו $v_1\dots v_k$ ו"ע המתאימים לע"ע λ אז גם צ"ל שלהם (שלא מתאפס) הוא ו"ע של אותו ע"ע

הוכחה: יהא $w=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i v_i$ צ"ל שלהם אזי $Aw=A(\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i v_i)=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i Av_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\lambda v_i=\lambda\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i v_i=\lambda w$

משפט: תהא Aמטריצה עם $\lambda_1\dots\lambda_m$ ע"ע שונים, $v_1,\dots v_m$ ו"ע עצמיים מתאימים אזי $\{v_1,\dots v_m\}$ בת"ל

הגדרה: בסימונים לעיל המרחב העצמי של λ הוא $V_\lambda=N(A-\lambda I)$

הערה: $V_\lambda=\{v\,|Av=\lambda\cdot v,\, v\text{ eigenvector}\}\cup\{0\}$

הערה: בסימונים האלה, מהמשפט נובע כי $V_{\lambda_i}\cap V_{\lambda_j}=\{0\}$ לכל $i\neq j$

ליכסון

הגדרה: Aתקרא לכסינה אם A דומה למטריצה אלכסונית (כלומר קיים Pהפיכה כך ש $P^{-1}AP=D$ אלכסונית)

דוגמא: $A=\begin{pmatrix}5&6\\-3&-4\end{pmatrix}$ ראינו כי $\{\lambda_1=2,\lambda_2=-1\}$ע"ע

ו $\{v_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\}$ו"ע בהתאמה.

נגדיר $P=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}$ כעת:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}A(v_1, v_2) = P^{-1}(Av_1, Av_2) \\ &= P^{-1}(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) = P^{-1}(v_1, v_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר A לכסינה.

משפט (מהרצאה): $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה$\Leftrightarrow$ יש בסיס של ו"ע ל $\mathbb{F}^n$ ($\Leftrightarrow$ הריבוי הג"א =ר"א לכל ע"ע + לפולינום האופיני יש n שורשים .)

הוכחה: $(\Leftarrow)$ נתון A לכסינה קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

נסמן $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$ אזי

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & | & | \end{pmatrix} = AP = PD = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

כלומר לכל i מתקיים $Av_i = \lambda_i v_i$ כלומר v_i ע"ע וכיוון ש P הפיכה הם בת"ל (ובפרט $v_i \neq 0$לכל i) ולכן בסיס ל $\mathbb{F}^n$

$(\Rightarrow)$ יש בסיס $\{v_1 \dots v_n\}$ של ו"ע כלומר לכל i מתקיים $Av_i = \lambda_i v_i$.

נגדיר $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}\begin{pmatrix} | & | & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & | & | \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & | & | \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

תרגיל: קבע האם $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$לכסינה כאשר:

1. $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה ממשית.

   פתרון: $f_A(\lambda) = |\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}| = \lambda^2 + 1$ כיוון של f_A אין שורשים בממשים בפרט אין ל A ו"ע ולכן A אינה לכסינה.

2. $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$מטריצה מרוכבת.

   פתרון: $f_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ השורשים הם $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$ נמצא ו"ע.

עבור $\lambda_1 = i$. $N(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix})$ ולכן $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ו"ע.

עבור $\lambda_1 = -i$. $N(\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix})$ ולכן $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ו"ע.

קל לראות ש $\{v_1, v_2\}$ בת"ל ולכן לפי השלישי חינם בסיס ל $\mathbb{C}^2$ ולכן A לכסינה.

תרגיל: האם כל מטריצה $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ לכסינה?

פתרון: לא! למשל $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $f_A(\lambda) = |\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}| = (\lambda-1)^2$.

$\lambda = 1$ ע"ע יחיד.

ו"ע: $N(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ ולכן $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו"ע יחיד בפרט אין בסיס של ו"ע ל $\mathbb{C}^2$ ולכן A אינה לכסינה.

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה. יהיו $\lambda_1 \dots \lambda_n$ הע"ע שלה. הוכח $|A| = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ (כלומר הדטרמינטטה שווה למכפלה הע"ע)

פתרון: תרגיל (העזר בטענה משיעור קודם כי למטריצות דומות יש אותה דטרמיננטה)

תרגיל: תהא $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$חשב את A^{2013}.

פתרון: ראינו כי $\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1\}$ע"ע

ו $\{v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ו"ע בהתאמה.

נגדיר $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ויתקיים $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ או לחילופין $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$

כעת

$$\begin{aligned}
A^{2013} &= \left(P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}\right)^{2013} \\
&= \left(P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}\right)\cdot\left(P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}\right)\cdots\left(P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}\right) \\
&= P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{2013}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2^{2013} & 0 \\ 0 & (-1)^{2013} \end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}$$

תרגיל: תהא $A = \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ $a_i \neq a_j$ הוכח: Aלכסינה.

פתרון : היעזר במשפט: $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה$\Leftrightarrow$ יש בסיס של ו"ע ל $\mathbb{F}^n$

תרגיל: הוכח ש $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{17} & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ מטריצות דומות.

פתרון: תרגיל: היעזר בתרגיל הקודם.

ליכסון א"ג

הגדרה: $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ תקרא א"ג אם עמודתיה הן וקטורים א"נ.

פירוט: נסמן $P = (v_1, \ldots, v_n)$ כאשר $\{v_1, \ldots, v_n\}$ א"נ.

אזי $PP^t = I$ (כי $(PP^t)_{i,j} =< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$)

בפרט $P^{-1} = P^t$ וגם $P^tP = I$.

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ היא תקרא לכסינה א"ג היא לכסינה בעזרת מטריצה א"ג.

(כלומר קיימת מטריצה P א"ג כך ש $P^{-1}AP = D$ כאשר D אלכסונית. כיוון ש P א"ג זה מתפרש בצורה $P^tAP = D$).

עובדות על מטריצה ממשית סימטרית $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

1. קימיים לה תמיד n ע"ע וכולם ממשים
2. ו"ע של ע"ע שונים - ניצבים (כלומר $V_{\lambda_1} \subset (V_{\lambda_j})^{\perp}$ לכל $i \neq j$)
3. משפט: A סימטרית $\Leftrightarrow$ A לכסינה א"ג $\Leftrightarrow$ יש בסיס א"נ של ו"ע ל $\mathbb{R}^n$.
4. במקרה ש A סימטרית אזי הליכסון יתבצע בשלבים הבאים:
   (א) נמצא ע"ע של A
   (ב) לכל λ ע"ע נמצא בסיס א"נ ל V_λ בעזרת גרם שמידט (נסמן B_λ)
   (ג) בגלל עובדה 2 נקבל $\bigcup_{\lambda \text{ eigenvalue}} B_\lambda$ בסיס א"נ ל $\mathbb{R}^n$ ואם נשים את הו"ע כעמודות של מטריצה P נקבל $P^{-1}AP = P^tAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

נעקוב אחרי העובדות הללו בעזרת התרגיל הבא:

תהא $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. לכסן א"ג את A.

פתרון: $f_A(\lambda) = |\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}| = (\lambda-3)[(\lambda-2)^2-1] =$
$(\lambda-3)(\lambda^2-4\lambda+3) = (\lambda-3)^2(\lambda-1)$

כלומר $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ ע"ע. נמצא ו"ע מתאימים: עבור $\lambda_1 = 3$

$$\begin{aligned} N(A-3I) &= N(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \\ &= span\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

עבור $\lambda_2 = 1$:

$$N(A-I) = N(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}) = span\{v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

נעזר בגרם שמידט למצוא בסיס א"נ לכל אחד מהמרחבים העצמיים:

עבור $V_{\lambda_1=3}$:

כיוון ש v_1, v_2 כבר מאונכים נשאר לנרמל אותם $\{w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1, w_2 = v_2\}$

עבור $V_{\lambda_2=1}$:

כיוון ש v_3 וקטור יחיד נשאר לנרמל אותו $\{w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_3\}$

כעת בגלל שו"ע של ע"ע שונים מאונכים אזי w_3 מאונך ל w_1, w_2 ולכן $\{w_1, w_2, w_3\}$ בסיס א"נ של ו"ע.

נסמן $P = (w_1, w_2, w_3)$ ונקבל $P^{-1} = P^t$ ו $P^tAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$