פתרון הבוחן

26 ביולי 2018

1. (א) ראשית, נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=1,2$:

$$-1 = a_1 = 1^2 - 2\cdot 1,\ \ 0 = a_2 = 2^2 - 2\cdot 2\ \checkmark$$

כעת, נניח שהטענה נכונה לכל $n\leq k$, כלומר: $a_n = n^2-2n$, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$. כלומר, נוכיח: $a_{k+1}=(k+1)^2-2(k+1)$.
אם כן, לפי נוסחת הנסיגה:

$$a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} + 2 =$$

לפי הנחת האינדוקציה:

$$= 2\left(k^2-2k\right) - (k-1)^2 + 2(k-1) + 2 =$$

מפה זה רק לפתוח סוגריים וכאלה:

$$= 2k^2-4k-k^2+2k-1+2k-2+2 = k^2+2k+1-2k-2 = (k+1)^2-2(k+1)$$

כ נ ד ר ש.

(ב) הטענה נכונה, נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית:

$$(a,b)\in A\times(B\cup C)$$
$$\updownarrow$$
$$a\in A\wedge b\in B\cup C$$
$$\updownarrow$$
$$a\in A\wedge(b\in B\vee b\in C)$$
$$\updownarrow$$
$$(a\in A\wedge b\in B)\vee(a\in A\wedge b\in C)$$
$$\updownarrow$$
$$(a,b)\in A\times B\vee(a,b)\in A\times C$$
$$\updownarrow$$
$$(a,b)\in(A\times B)\vee(A\times C)$$

המעבר הראשון נובע מהגדרת מכפלה קרטזית, השני מהגדרת איחוד, השלישי מחוק הפילוג, הרביעי מהגדרת מכפלה קרטזית והחמישי מהגדרת איחוד.

2. (א) נראה כי: $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{x \in \mathbb{N} | 2 \le x\}$. בשלב ראשון נוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $B_n = \{x \in \mathbb{N} | 3n-1 \le x \le 3n+1\}$.

$$x \in B_n = A_{n+1} \backslash A_n \iff x \in A_{n+1} \wedge x \notin A_n \iff (2 \le x \le 3n+1) \wedge \neg (2 \le x \le 3n-2) \iff 3n-1 \le x \le$$

כלומר: $x \in \{x \in \mathbb{N} | 3n-1 \le x \le 3n+1\} \iff x \in B_n$ ולכן מתקיים שיוויון.

כעת, נוכיח כי $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{N} | 3n-1 \le x \le 3n+1\} = \{x \in \mathbb{N} | 2 \le x\}$ ע"י הכלה דו כיוונית:

יהי $x \in \{x \in \mathbb{N} | 2 \le x\}$ נוכיח כי הוא באיחוד:

x הוא מספר טבעי גדול מ2, לכן יש 3 מקרים: **אם** x **מתחלק ב 3,** אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x = 3n$ ולכן $3n-1 \le x \le 3n+1$ כלומר $x \in B_n$ ולכן x באיחוד.

אם $x-1$ **מתחלק ב 3,** כלומר קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x-1 = 3n$ כלומר $x = 3n+1$ ולכן $3n-1 \le x \le 3n+1$ כלומר $x \in B_n$ ולכן x באיחוד.

אם $x+1$ **מתחלק ב 3,** כלומר קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x+1 = 3n$ כלומר $x = 3n-1$ ולכן $3n-1 \le x \le 3n+1$ כלומר $x \in B_n$ ולכן x באיחוד.

ובכל אופן מצאנו כי $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

נניח כעת כי $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{N} | 3n-1 \le x \le 3n+1\}$ ונוכיח כי $x \in \{x \in \mathbb{N} | 2 \le x\}$.

$x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{N} | 3n-1 \le x \le 3n+1\} \implies \exists n \in \mathbb{N} : 3n-1 \le x \le 3n+1$.

כיוון ש$n \ge 1$ נקבל $3n-1 \ge 2$ ולכן $x \ge 2$ כלומר $x \in \{x \in \mathbb{N} | 2 \le x\}$. וסיימנו.

(ב) ניקח בתור הקבוצה האוניברסלית שלנו את $\mathbb{N}$. אזי :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N} \setminus B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)^c = (\{x \in \mathbb{N} | 2 \le x\})^c = \{1\}$$

3. (א) אם בקבוצה A יש שני איברים שונים a, b, R_1 לא יחס שקילות משום שאינו טרנזיטיבי: לדוגמא: $(a,a)\, R_1\, (a,b) \wedge (a,b)\, R_1\, (b,b)$ אבל לא מתקיים $(a,a)\, R_1\, (b,b)$.

אם $A = \{a\}$, $A \times A = \{(a,a)\}$ והיחס R_1 יחס שקילות. חשבו מה קורה אם הקבוצה ריקה.

בכל מקרה, R_2 הוא יחס שקילות. הוכחה:

רפלקסיביות: $a = a \quad \forall (a,b) \in A \times A,$ ולכן $(a,b)\, R_2\, (a,b)$.

סימטריות: יהיו $(a,b), (c,d) \in A \times A$ כך ש-$(a,b)\, R_2\, (c,d)$. אזי: $a = c$.

לכן $a=c$, ונקבל ש־$(c,d)\,R_2\,(a,b)$.

טרנזיטיביות: יהיו $(a,b),(c,d),(e,f)\in A\times A$ כך ש־$(a,b)\,R_2\,(c,d)\wedge$ $(c,d)\,R_2\,(e,f)$. אזי $a=c\wedge c=e$. לכן $a=e$. מהגדרת היחס נקבל: $(a,b)\,R_2\,(e,f)$.

(ב) נוכיח: $|A\times A/R_2|=n$.

אם $|A|=0$ זה אומר ש־A קבוצה ריקה, ולכן גם $A\times A$ קבוצה ריקה. בפרט, $|A\times A/R_2|=0$.

כעת, נניח ש$A\neq\emptyset$.יהי $x\in A$. ראשית, נראה שלכל $a\neq b\in A$, $[(a,x)]_{R_2}\neq$ $[(b,x)]_{R_2}$. זה שקול להוכיח ש־(a,x) לא מתייחס ל־(b,x) (משום שהוכחתם בהרצאה ששני איברים שקולים אמ"ם יש להם את אותה מחלקת שקילות). אבל זה ברור מהגדרת היחס. לכן מצאנו n מחלקות שקילות שונות. כעת, נוכיח שאלו כולם. יהי $(a,b)\in A\times A$. מהגדרת היחס $(a,b)\,R_2\,(a,x)$ ולכן $[(a,b)]_{R_2}=$ $[(a,x)]_{R_2}$. לסיכום, $|A\times A/R_2|=|\{[(a,x)]_{R_2}:\forall a\in A\}|=|A|=n$.

במקרה שבו R_1 יחס שקילות, יש בקבוצה $A\times A$ רק איבר אחד, ולכן בקבוצת המנה יש רק איבר אחד: $|A\times A/R_1|=1$.