<u>פיתרון לתרגיל 9</u>

<u>תשובה 1:</u>

א.האינטגרל צריך ליהיות 1:

(אפשר גם לפי חישובי שטחים של משולש + שני מלבנים):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^{1/2} 2xdx + \int_{1/2}^{1} dx + \int_1^2 cdx = x^2\Big|_0^{1/2} + \frac{1}{2} + c = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + c = 1$$

$$c = \frac{1}{4}$$

ב.

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ a^2 & 0 \le a < 1/2 \\ 1/4 + (a - 1/2) & 1/2 \le a < 1 \\ 1/4 + 1/2 + (a-1)1/4 & 1 \le a < 2 \\ 1 & 2 \le a \end{cases}$$

ג. $$P\left(1/3 < X < 3/4\right) = F_X\left(3/4\right) - F_X\left(1/3\right) = 1/4 + \left(3/4 - 1/2\right) - \left(1/3\right)^2 = \frac{7}{18}$$

ד.   תוחלת של X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) = \int_0^{1/2} 2x^2dx + \int_{1/2}^{1} xdx + \int_1^2 \frac{1}{4}xdx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^{1/2} + \frac{x^2}{2}\Big|_{1/2}^{1} + \frac{x^2}{8}\Big|_1^2 = \frac{25}{24}$$

<u>תשובה 2:</u>

א.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} c\cdot\cos xdx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c\cdot\cos xdx = c\cdot\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = c\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= c\left[1-(-1)\right] = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

ב.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X u du=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{2}\cos u du=\frac{1}{2}\sin u\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{x}=\frac{1}{2}\left[\sin x-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

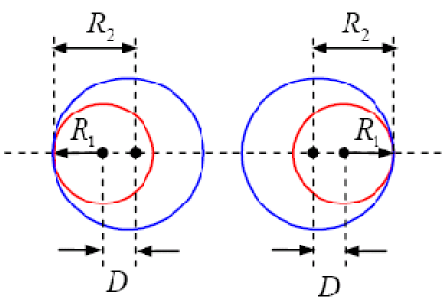
$$=\frac{1}{2}\left[\sin x+1\right]$$

ולכן

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}\left[\sin x+1\right] & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 1 & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

תשובה 3:

הציור מראה כי את ההסתברות הדרושה אפשר לכתוב בצורה



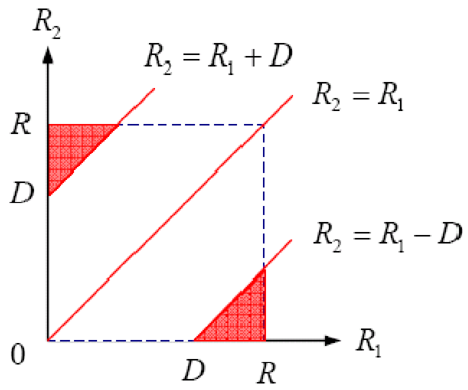
$$P_0=P(D\le R_2-R_1 / R_2>R_1)P(R_2>R_1)$$
$$+P(D\le R_1-R_2 / R_1>R_2)P(R_1>R_2)$$

מכאן ניתן לראות כי

$$.P_0=P(D\le |R_2-R_1|)$$

כיוון ש— $R_1 \sim U(0,R)$ ו— $R_2 \sim U(0,R)$, מותר להשתמש בגישה הקלאסית להסתברות.

- עבור $0 \le D \le R$ מתקיים:



$$P_0 = \frac{\left|\{D \le |R_2 - R_1|\}\right|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(R-D)^2}{R^2}$$

$$= \left(1 - \frac{D}{R}\right)^2.$$

- עבור $D > R$, ההסתברות $P_0 = 0$ כך שהתשובה הסופית היא

$$P_0 = \left(1 - \frac{D}{R}\right)^2 \Theta(R-D).$$

באשר

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

<u>תשובה 4:</u>

$X \in [0,20]$

נחלק לשני מאורעות:

או שמספיקים לרכבת של 07:15, זאת אומרת ש X בין 0 לבין 5, או שמגיעים לרכבת של 07:30, זאת אומרת ש X בין 5 לבין 20.

$P(X \le 5) = F_X(5)$

עבור ערכי Y שבין 0 ל – 5 , ישנן שתי אפשרויות – או שנמתין לפחות Y ונגיע לרכבת הראשונה (של ורבע) או שנמתין לפחות Y ונגיע לרכבת השניה (של וחצי)

$$P(Y \le y) = P(X \in [5-y,5]) + P(X \in [20-y,20]) = F_X(5) - F_X(5-y) + F_X(20) - F_X(20-y)$$

עבור ערכי Y שגדולים מ – 5, הם יכולים להתקבל רק אם נגיע לרכבת השניה (של וחצי), הסיכוי שנמתין לפחות y>5 דקות הוא הסיכוי להספיק לרכבת הראשונה (שכן אז נמתין פחות מ – y דקות), ועוד הסיכוי להמתין לפחות y דקות לרכבת השניה:

$$P(Y \le y) = P(X \in [0, 5] + P(X \in [20-y,20])) = F_X(5) + F_X(20) - F_X(20-y)$$

ונגזור על-מנת לקבל צפיפות:

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(5-y)+f_X(20-y) & 0\le y\le 5 \\ f_X(20-y) & 5\le y\le 15 \\ 0 & else \end{cases}$$

<u>תשובה 5:</u>

א. הקשר בין המקדמים a ו— b לבין השורשים x_1 ו— x_2 נתון על ידי זוג הנוסחאות

$$x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \quad \text{—ו} \quad x_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

אשר מביאות

$$\begin{cases} a=-(x_1+x_2), \\ b=x_1x_2. \end{cases}.$$

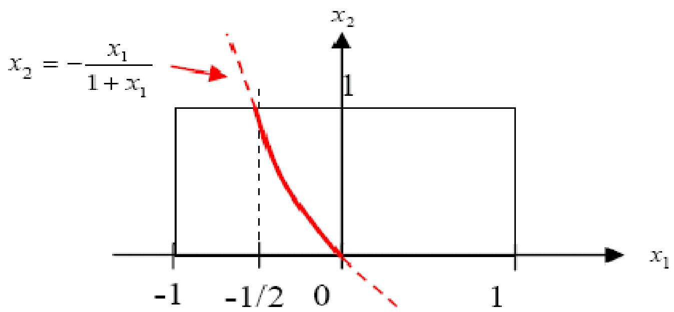
ההסתברות הדרושה, $P(a>b)$, היא

$$.P(a>b)=P\left(-(x_1+x_2)>x_1x_2\right)=P\left(x_2<-\frac{x_1}{1+x_1}\right)$$

בשויון האחרון, השתמשנו בעובדה ש— $1+x_1$ אינו שלילי. על פי גישה קלאסית להסתברות,

$$.P\left(x_2<-\frac{x_1}{1+x_1}\right)=\frac{\left|\left\{x_2<-\frac{x_1}{1+x_1}\right\}\right|}{|\Omega|}$$

מהציור עולה, כי גודל מרחב המדגם הוא $|\Omega| = 2$. גודל המאורע $\left\{x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right\}$ הוא



$$\left|\left\{x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right\}\right| = \frac{1}{2} + \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(-\frac{x_1}{1+x_1}\right)dx_1 = \frac{1}{2} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{x_1+1-1}{1+x_1}dx_1 = \frac{1}{2} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(1-\frac{1}{1+x_1}\right)dx_1$$

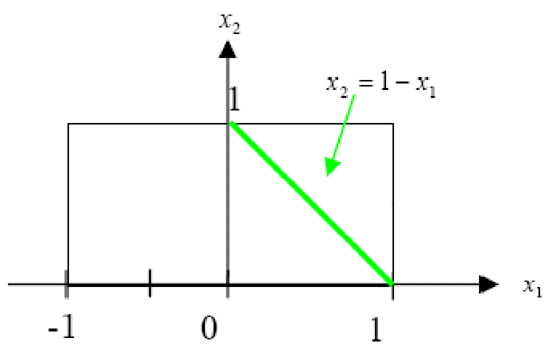
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{1+x_1}dx_1 = \ln(1+x_1)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} = \ln 2.$$

זה מביא

$$.P(a<b) = \frac{\left|\left\{x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1}\right\}\right|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}\ln 2$$

ב. ההסתברות הדרושה היא הסתברות מותנית

$$P(b>0 \ / \ a>-1) = P(x_1x_2>0 \ / \ -(x_1+x_2)>-1) = P(x_1>0 \ / \ x_2<1-x_1)$$
$$= \frac{P(x_1>0 \cap x_2<1-x_1)}{P(x_2<1-x_1)}$$



מהתרשים רואים ש

$$.P\left(x_1>0 \cap x_2<1-x_1\right)=\frac{\left|\{x_1>0\} \cap \{x_2<1-x_1\}\right|}{|\Omega|}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

וגם

$$P\left(x_2<1-x_1\right)=\frac{\left|\{x_2<1-x_1\}\right|}{|\Omega|}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

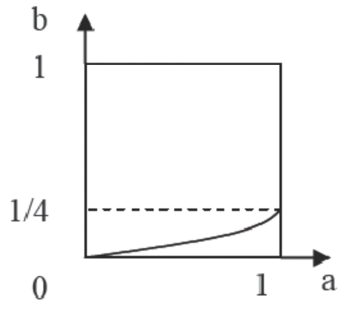
כך ש—

$$.P\left(b>0 \ / \ a>-1\right)=\frac{P\left(x_1>0 \cap x_2<1-x_1\right)}{P\left(x_2<1-x_1\right)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

ג. שורשי המשוואה הם :

x_1

את התשובה יש לחלק לשנים. ראשית נחשב את ההסתברות ששורשי המשוואה ממשיים, דהיינו כאשר מתקיים $a^2-4b\geq 0$ דהיינו ההסתברות הדרושה היא $P(b<\frac{a^2}{4})$ שמתאימה בידיוק לשטח שמתחת לעקום $b=\frac{a^2}{4}$



אזי $.P(b<a^2/4)=\int_0^1\frac{a^2}{4}da=\frac{1}{12}$

בשלב השני נמצא את הסתברות ש - $|X_1 - X_2| = \sqrt{a^2 - 4b} < \frac{1}{2}$ כאשר נתון ש $a^2 - 4b \geq 0$

$$P\left(\sqrt{a^2-4b} < \frac{1}{2} / a^2 > 4b\right) = P\left(a^2 - 4b < \frac{1}{4} / a^2 > 4b\right)$$

$$= \frac{P\left(\left\{a^2 - 4b < \frac{1}{4}\right\} \cap \left\{a^2 > 4b\right\}\right)}{P\left(a^2 > 4b\right)} = \frac{P\left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{16} < b < \frac{a^2}{4}\right)}{P\left(b < \frac{a^2}{4}\right)}$$

נשים לב ש $P(A < b < B) = P(b < B) - P(b < A)$ לכן

$$\frac{\int_0^1 \frac{a^2}{4} da - \int_{1/2}^1 \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{16}\right) da}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2} .$$

<u>תשובה 6:</u>

$X \sim \exp(0.1)$

1.

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \int_0^{10} 0.1 e^{-0.1x} dx = 1 - \left[(0.1) \cdot \frac{e^{-0.1x}}{-0.1}\right]_0^{10} =$$

$$= 1 + \left[e^{-0.1x}\right]_0^{10} = 1 + e^{-1} - 1 = \frac{1}{e}$$

2.

$$P(10 < x < 20) = \int_{10}^{20} 0.1 e^{-0.1x} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$$

<u>תשובה 7:</u>

על מנת של Y תהיה התפלגות אחידה, ההסתברות של כל אחד מערכיו להיות שליש, כלומר :

$$\frac{1}{3} = p(Y=0) = p(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$\frac{1}{3} = p(Y=1) = p(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

$$\frac{1}{3} = p(Y=2) = p(X \geq b) = \int_b^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda b}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל כי $a = \frac{\ln 1.5}{\lambda}$ וממשוואה אחרונה $b = \frac{\ln 3}{\lambda}$.